ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
49

For Senior & Graduate Courses

ソリトンと物理学

戸田　盛和　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-49

ソリトンと物理学

戸田　盛和　著

サイエンス社

SGCライブラリ

(The Library for **S**enior & **G**raduate **C**ourses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野**および**諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．
装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），
脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

1 **カオスと量子物理学**
中村勝弘著　本体 1857 円

3 **シュレーディンガー方程式**
仲滋文著　本体 1790 円

4 **量子コンピュータの基礎**
細谷暁夫著　本体 1857 円

5 **有限体と符号理論**
内田興二著　本体 1667 円

8 **差分方程式講義**
広田良吾著　本体 1857 円

9 **生命をつくる**
中野馨著　本体 1524 円

10 **計算物理入門**
上田顯著　本体 1381 円

11 **エコノミックゲームセオリー**
船木由喜彦著　本体 1429 円

12 **演習 場の量子論**
柏太郎著　本体 1886 円

13 **複雑系脳理論**
津田一郎著　本体 1429 円

16 **有限要素法による構造解析事例集**
白鳥正樹・三好俊郎編著　本体 1429 円

18 **独立成分分析**
甘利俊一・村田昇共編著　本体 1667 円

21 **数学の未解決問題**
上野・高橋・中島共編　本体 1886 円

23 **微分幾何講義**
二木昭人著　本体 1857 円

24 **脳の謎に挑む**
茂木健一郎編著　本体 1829 円

25 **量子場脳理論入門**
高橋康監修 保江邦夫著　本体 1876 円

26 **脳型コンピュータの実現に向けて**
甘利俊一編著　本体 1857 円

27 **ガロア理論**
中野伸著　本体 1790 円

28 **量子可積分系入門**
白石潤一著　本体 1876 円

29 **伝えるための理工系英語**
宮野健次郎著　本体 1429 円

30 **応用のための関数解析**
吉田善章著　本体 1800 円

31 **分子コンピュータの現状と展望**
萩谷昌己編著　本体 1524 円

32 **量子情報理論入門**
林正人著　本体 1886 円

33 **工学のための非線形解析入門**
藪野浩司著　本体 1857 円

34 **経済における確率的モデルへの招待**
青木正直著／青山・藤原 監訳　本体 1886 円

35 **賭けの数理と金融工学**
竹内啓著　本体 1429 円

36 **応用のための確率論・確率過程**
松本裕行著　本体 1876 円

37 **情報理論の基礎**
村田昇著　本体 1619 円

38 **複素ニューラルネットワーク**
廣瀬明著　本体 1695 円

39 **マクスウェル方程式**
北野正雄著　本体 1876 円

40 **制御理論講義**
木村英紀著　本体 1886 円

41 **バイオインフォマティクスの基礎**
冨田勝監修 斎藤輪太郎著　本体 1857 円

42 **トポロジー入門**
田中利史・村上斉共著　本体 1886 円

43 **アルゴリズムと計算量**
谷聖一著　本体 1857 円

44 **ゲーム理論のフロンティア**
池上高志・松田裕之 共編著　本体 1829 円

45 **ゲージ場の量子論入門**
近藤慶一著　本体 1886 円

46 **現代物理のための解析力学**
早田次郎著　本体 1857 円

47 **現代物理数学への招待**
鈴木淳史著　本体 1876 円

48 **例題形式で学ぶ現代素粒子物理学**
川村嘉春著　本体 1886 円

49 **ソリトンと物理学**
戸田盛和著　本体 1876 円

表紙デザイン：長谷部貴志

サイエンス社のホームページのご案内
http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．

まえがき

もう40年も前のことであるが，著者は非線形格子（やや不正確であるがソリトンといってもよい）の研究に熱中し，それによって面白いように短期間につぎつぎと困難をのりこえて目標とした成果を挙げることができた．いわば精神的に高揚した状態にあったのである．それがどのようにしてもたらされたのか，それはわからないが，その頃のことを記しておくことも研究環境を考えたりするのに役立つかもしれないという気がする．

1960年代の頃，著者たちは「振動子グループ」とか「格子グループ」とか略称された研究グループをつくって理論物理学の研究活動をおこなっていた．その趣旨を一言でいえば「厳密で基礎的な理論を目標とする」というようなことであろうか．不確かな近似計算を正し，すぐに役立つテーマや流行のテーマを追うよりも研究者が自分で疑問とする深刻な問題を追求することなどともいえると思う．これを京都大学の基礎物理学研究所で提案し，このグループを結集させたのは京都大学の寺本英教授であった．具体的な研究課題の一つとして著者が考えたのは力学の時間的可逆性と熱的な平衡状態への近接が両立することを，厳密な扱いができる格子模型を用いて明白に証明するという問題であった．そこで結晶格子の熱伝導を考えると，不純物や格子欠陥のほかに格子振動の非線形を考えなければならないことになる．

1次元力学系を伝わる非線形の波としてはすでに19世紀に発見されている浅水波の孤立波（ソリトン）があり，これを記述する偏微分方程式は非線形格子振動の方程式に似ている．このように対象を煮つめた末に著者は厳密な解（周期解やソリトン解）をもつ非線形格子を発明した（1967）．これは多自由度の可積分力学系の新しい発見としても注目された．

以上が第1編の内容のあらましである．

第2編では著者が発明した非線形格子（戸田格子）の運動を数値的に積分したアメリカのJ. フォード（Ford）の結果について述べる．これによって明らかにされたなめらかな軌跡は戸田格子の可積分性を明白に証明するものだったので，これに触発されたH. フラシュカ（Flaschka）などが戸田格子の解析的な積分方法を発見するのに成功した（1974）．これが契機になってその後いろいろの積分方法が見出され，戸田格子以外の可積分な非線形波動も発見されるにいたった．

このように第2編はほとんどが外国でなされた仕事である．

第3編「物理学とは何か」（『数理科学』2002年5月号～2004年5月号から転載）では多くの物理学者の見解や生活などについて述べている．物理といっても学者ごとにちがうものであることを受けとってほしい．またどのような環境がどのような研究者を育てるのに適したものであろうかと考える読者もあるだろう．そういうことを若い人には学んでほしいし，よりよい世の中をつくるのに寄与してほしい．

1967年秋から68年春までの半年間，著者は日本学術振興会の援助を得て京都大学に滞在することができたが，これも寺本さんの尽力によるものであった（彼は1996年2月に亡くなった）．

後に京大から九州大学の数理生物学教室へ移られた松田博嗣さんには研究のみならずいつも相談相手になっていただいた．また京都工芸繊維大学の武野正三さんは研究グループに絶えず活力を与えてくれ

たし，さらに多くの研究室の方々にいろいろお世話になり，いろいろと教えていただいた．そして一緒に学び楽しくすごした当時の若い大学院生諸君にも厚くお礼をいいたい．振動子グループからは相当多くの研究者が巣立っていった．器用に巣立った人，いくらか不器用に巣立っていった人など，今でも彼らのことをなつかしく思い出すことがしばしばである．

本書の出版ではサイエンス社の伊崎修通さんに御めんどうをかけた．期限をつけても中々それにしたがわない著者に対していつも根気よく待ってくれたのは大変有難かった．

2006 年 5 月

戸田　盛和

目　次

コラム

第3編は,「数理科学」(月刊)の連載「物理学とは何か」に掲載されたものを再編集し,これに書き下ろしを加え,構成されています.再録したものについては,増補・訂正を加えてありますことをおことわりいたします.

初出一覧

〈＝は原題名〉	( ) は掲載年月号.
第 1 章　物理と非物理(ギリシャ科学)〈＝プロローグ—物理と非物理〉	('02.05)
第 2 章　自然（ニュートン力学)〈＝物理と自然〉	('02.06)
第 3 章　社会（科学がきらわれる理由)〈＝物理と社会〉	('02.08)
第 4 章　哲学（理論の美しさ)〈＝物理と哲学〉	('02.09)
第 5 章　歴史（地球の年齢)〈＝物理と歴史〉	('02.11)
第 6 章　技術（科学と技術)〈＝物理と技術〉	('02.12)
第 7 章　情報（熱力学の基礎)〈＝物理と情報〉	('03.02)
第 8 章　心（創造と意志)〈＝物理と心〉	('03.03)
第 9 章　宗教（自然界の階層)〈＝物理と宗教〉	('03.05)
第10章　教育（薄膜の物理)〈＝物理と教育〉	('03.06)
第11章　文化（何もない空間)〈＝物理と文化〉	('03.08)
第12章　人間（波と粒子)〈＝物理と人間〉	('03.09)
第13章　生命（生命とは何か)〈＝物理と生命〉	('03.11)
第14章　倫理（進化と退化)〈＝物理と倫理〉	('03.12)
第15章　宇宙（相対性理論)〈＝物理と宇宙〉	('04.03)
第16章　時空（膨張宇宙)	(新　規)
第17章　エピローグ	('04.05)

各編題字・装画＝著者

第1編

ソリトンの歴史



第 1 章
ソリトンの発見

ふつうの波の理論では，波の重ね合わせの原理が出発点になる．簡単な重ね合わせの原理に従わない波，すなわち非線形波動の研究が粒子性をもった波，ソリトンの発見につながった．100 年以上のソリトンの発見の歴史を振り返る．

1.1 運河のほとりで（1834）

ソリトンの起源をたずねると，それが物理学からきたものではなく，もちろん数学からきたものでもなく，むしろ工学者のちょっとした発見から由来したものであることがわかる．

19 世紀の初めスコットランドのエジンバラにラッセル（John Scott Russell, 1808–1882）という船舶工学者がいた．彼は 16 歳でグラスゴー大学を卒業し，その後エジンバラ大学で教えて非常な成功を収めたということである．運河会

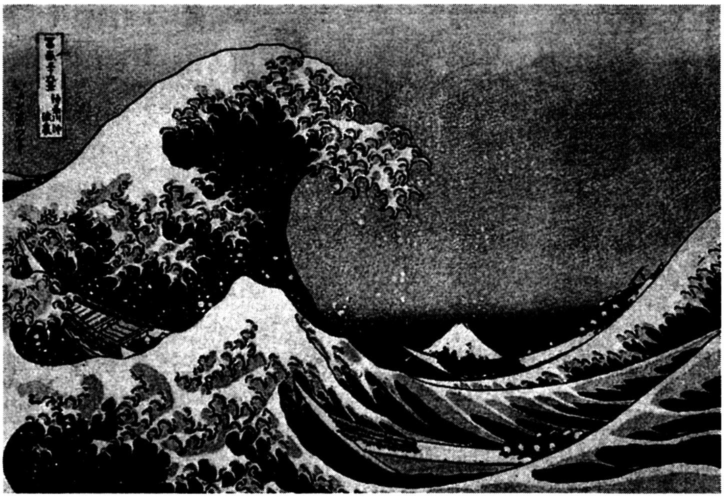


図 1.1　葛飾北斎「富嶽三十六景・神奈川沖浪裏」．

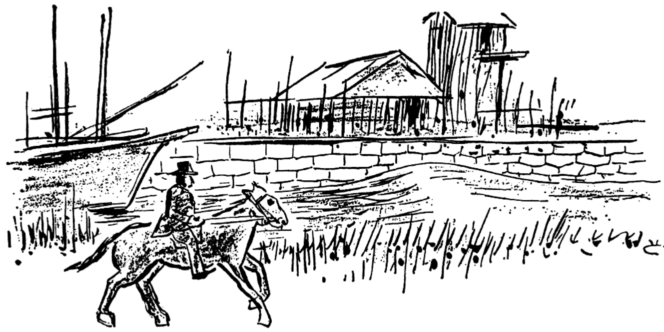


図 1.2 運河のほとりのスコット・ラッセル（1834）（画・戸田盛和）．

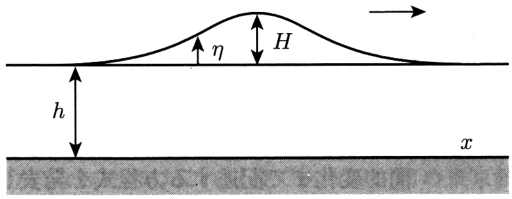


図 1.3 浅水波．$h=$ 水の深さ，$H=$ 波高，$c=$ 孤立波の速度．

社のために水路の調査をして繰り返しその報告をすると共に船の抵抗を小さくする研究をしている．その頃はまだ鉄道がなく輸送は主に船に頼っていた時代であった．

1834 年 8 月に彼は馬に乗って運河のほとりを散歩していたが，たまたま馬に引かれて進んでいた船が急に止って，そのとき船の舳先に盛り上がっていた水が船を離れて孤立した波になり，運河に沿って進んで行くのを目にした．その動きに興味をもった彼が馬を急がせて付いて行くと，孤立した波は形を変えずに何百メートルも進み，運河の曲がったところでようやく認められなくなった（図 1.2）．彼はこの孤立波を研究するために実験水槽を作り，波の盛り上がりの高さと波の速さとの関係や波形などを記録した．この仕事は 150 年以上隔てた今でもしばしば引用される．

この発見に対するイギリス学会の大御所たちの反応は様々であったらしい．エアリー関数などで有名な Airy 卿はこれを新しい発見とみなさず，孤立波はラグランジュ（Lagrange）の線形波動理論に含まれている波と同じものとした．この理論によれば，波高の小さい浅水波は変形もしないで $c_0=\sqrt{gh}$（g は重力加速度，h は水深）の速さで進む．これに対してラッセルは波高 H の孤立波は $c=\sqrt{g(h+H)}$ の速さで進むという実験式を出していて，このほうが正しかった（図 1.3）．流体力学のナビエ・ストークス方程式などで有名なストークス（Stokes）卿やレイリー（Rayleigh）卿などはラッセルの発見を支持する結果を導いている．

60 年ほど経ってオランダのコルテヴェーグとド・フリース（D.J. Korteweg と G. de Vries）はレイリー卿の方法を拡張して浅水波の運動を記述する非線

形方程式を得た（1895）．これをコルテヴェーグ-ド・フリース方程式（略してKdV 方程式）と言う．彼らはこの方程式を用いてラッセルが発見した孤立波だけでなく周期的な波も導いている．さらに彼らは孤立波や周期波からのずれがある場合の波形の時間的変化を論じているが明確な結果を導き出すことはできなかった．KdV 方程式は非線形なので，それを積分する方法も高速計算機もなかった頃のことなので無理もないことであった．

なおスコットラッセルはスコット（Scott）として引用したことがあるが，しかし文献を見てもラッセルというのが本当である（H. ラウス・S. インス著『水理学史』（鹿島出版会，昭和 49 年）や Lamb: *Hydrodynamics* などによる）．

1.2 浅水波の KdV 方程式（1895）

1895 年にオランダの Korteweg とその学生であった de Vries は浅水波の時間的変化まで記述する方程式を発表した．これが KdV 方程式である．

1.2.1 KdV 方程式とその解

波による水の高まりを η とすると KdV 方程式は

$$\boxed{\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{3}{2}\frac{c_0}{h}\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi}+\frac{c_0h^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial\xi^3}=0}$$

と書ける．ここで c_0 はラグランジュが導いた波の速さ（h は水の高さ，g は重力加速度）

$$\boxed{c_0=\sqrt{gh}}$$

であり，ξ は速度 c_0 で波の方向に進む座標

$$\boxed{\xi=x-c_0t}$$

である（第 2 項は η に関して非線形である）．

1.2.2 孤立波解と周期解

上の KdV 方程式は孤立波解

$$\eta=H\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{3H}{4h^3}}\left(\xi-\frac{c_0H}{2h}t\right)$$

をもつ．ここで H は孤立波の波高（図 1.3）を表し，$c_0H/2h$ は座標系 ξ に対する孤立波の速度である．静止した運河の水に対する孤立波の速度 c は

$$c=c_0+c_0\frac{H}{2h}\simeq\sqrt{g(h+H)}$$

で与えられる．

Korteweg らは孤立波だけでなく，KdV 方程式の周期波解も与えている．これは楕円関数 cn を用いて書かれているので，周期波解は cnoidal 波と呼ばれることがある．正弦波 sinusoidal 波にならった名である．周期波については後に述べることにする（楕円関数については「付録」を参照のこと）．

1.3 Fermi らの再帰現象（1955）

今からみると，この 50 年間における非線形振動研究の発端はフェルミ（E. Fermi），パスタ（J. Pasta），ウラム（S. Ulam）の 3 人（略して FPU）の計算機実験であったと言える．この研究は第 2 次世界大戦中にアメリカのロスアラモス（Los Alamos）研究所でなされ，1955 年にその研究報告として印刷された．そのため当時の日本ではこの論文を見ることはできなかった．Fermi は 1953 年に亡くなり，1955 年になって Fermi の論文集が発行された．FPU の論文が見られるようになったのはこれ以後であって，初め東京教育大学の図書室に入荷された論文集からコピーされ，ようやく日本の研究者に広く知られるようになった．こうして，FPU の研究は日本へ到着するまでに 10 年以上かかったのである．戦後の混乱がまだ続いていた時代の話である．

Fermi（1901–1954）は有名な原子核物理学者であるが，若いときに統計力学を研究し，エルゴード問題に関する論文も書いている．これは大雑把に言うと「閉じた力学系はすべての状態を経過する（エルゴード性）」という仮説である．象徴的な図を借りると（図 1.4），正方形のビリアード台で 1 個の球が止まることなく直進反射を繰り返す（ワイル（Weyl）の撞球と言う）と，それは台上をくまなく一様に通過する（球を撞き出す方向が有理数だといつかは出発点へ戻るが，無理数であれば一様に通過することになる．無理数は有理数に比べて圧倒的に多いから方向を勝手に選べば，それは無理数になるので，圧倒的に一様であると言ってよい）．

1950 年頃，当時発達してきた電子計算機が能力を発揮できるような問題を試そうと考え，エルゴードの問題をとり上げた．彼は簡単な問題としてたくさんの球をバネでつないだ 1 次元の格子をとり上げた．もしもバネの力が完全に

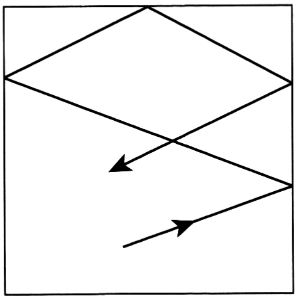


図 1.4 ワイルの撞球.

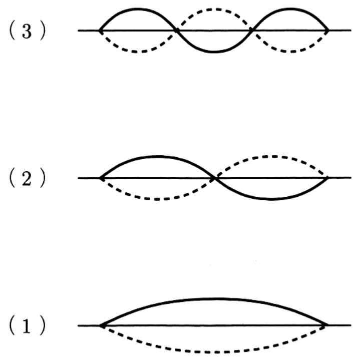


図 1.5　固有振動.

バネの伸び縮みに比例する（このときバネは線形であると言う）ならば，格子を伝わる波は固有振動の単なる重ね合わせとなる．両端を固定しておくと，固有振動は図 1.5 のように表される．音になぞらえれば，(1) は最も低い固有振動，(2) はその上の固有振動，(3) はその上の…というわけである．バネが完全に線形であれば，初めに与えた固有振動はいつまでも保たれる．初めにいくつもの固有振動を一緒に与えたときは，いつまでもそれらの固有振動がすべて保たれる．

もしもバネが完全に線形でなかったら，一つの固有振動からエネルギーが他の固有振動に分け与えられることが起こるだろう．これがすべての固有振動の間で起こるならば，結局はすべての固有振動が同じようにエネルギーをもつ状態になり，格子の運動はエルゴード的になることが期待される．もっと一般的には，どんな初期条件から出発しても，放置しておけばエネルギーはすべての固有振動に均等に分配されることになる．このとき体系はいわゆる熱的平衡状態にあって，各分子は細かい熱運動の状態になる．このようにマクロ的な運動がミクロ的な運動へ変化することを熱化と言っている．これは非可逆な変化である．

粒子が完全に線形な粒子で結ばれた体系の運動は固有振動の重ね合わせであるから，エルゴード的でない．実際の結晶を放置すれば一様の温度になるのは分子間の力が非線形であるからである．

Fermi は電子計算機を使えば非線形格子のエルゴード性を示すことができるに違いないと考え数学者の Ulam と物理学者の Pasta と，1 次元非線形格子に対する計算機実験を行った（FPU）．その結果は 1955 年にロスアラモスの研究所報告に発表されたが，その結果は Fermi らの予想に反するものであった．しかしこれは最近の非線形現象の研究の端緒となり，ソリトン発見への導火線となったのである．

Fermi らは 16 個，あるいは 64 個の粒子をバネで結んだ 1 次元系を調べた．バネの力は線形項にいくつかのタイプの非線形項を加えたものである．彼らは

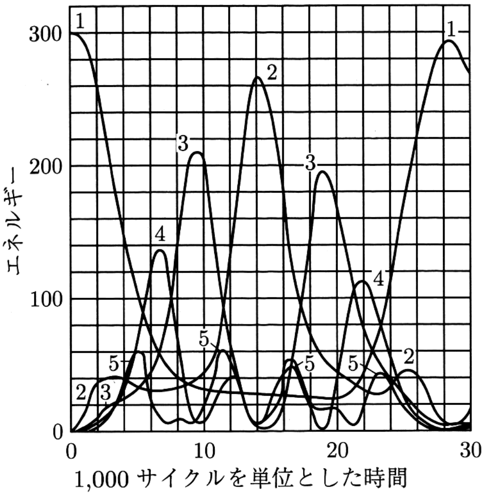


図 1.6　各固有振動（1, 3, 5, 7．図 1.5 参照）のエネルギーをサイクル（時間）に対してプロットした図．

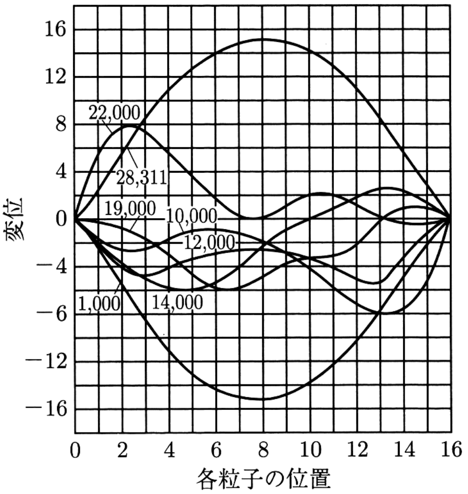


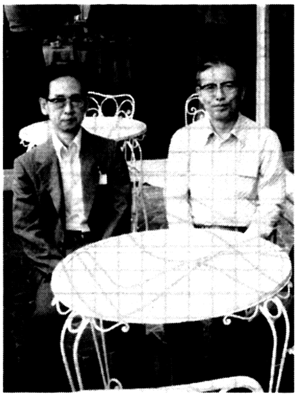
図 1.7　1,000, 10,000, ⋯ , 22,000, 28,311 サイクルのときの各粒子の変位を波形で表した図．

非線形項のために熱化の現象が起こることを予期したのであるが，バネの非線形性にも関わらず，初めに励起した状態が繰り返し再現されることが示された．これを FPU の再帰現象と言う．

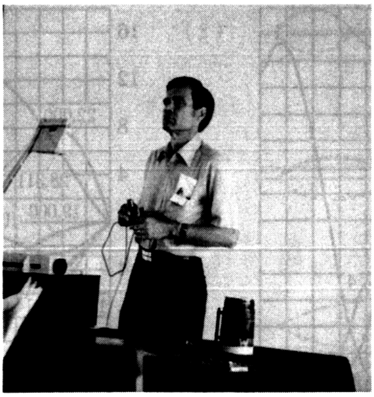
計算結果の一例を図 1.6 に示す．横軸は時間（計算機のサイクル）であり，約 30,000 サイクルまでが示されている．縦軸は各固有振動のエネルギーを示す．そのスケールは計算機の尺度で初期条件として最低の固有振動に与えた全エネルギーを 300 としている．最低の固有振動がもつエネルギーは 1 と書いた曲線で示されているが，これは初めの約 6,000 サイクルの間に固有振動 2, 3, 4, 5 に分け与えられるが，しかし約 10,000 サイクルのときに大部のエネルギーが固有振動 2 に集中している．ついで約 20,000 サイクルのとき固有振動 3 に集中してから，約 30,000 サイクルのときに全エネルギーがほとんど 1 へ戻っている．この再帰時間は約 30,000 サイクルである．非線形項を強くしたり非線形項の形を変えたりしても，同様の再帰現象が起こることが示される．

上記の再帰時間が約 30,000 サイクルの場合に，格子の振動の振れ幅を図示すると図 1.7 のようになる．この図で 1,000 サイクルと記したときは全エネルギーが最低の固有振動に集中している．それが 14,000 サイクルでは第 2 の固有振動が著しくなり，28,311 サイクルではエネルギーがほとんど全部最低の固有振動へ戻っている．

FPU の再帰現象はその後多くの人によって確かめられた．厳密に言えばおそらく十分長い時間の間には初期状態への再帰が次第に不正確になってしまうのが一般であろうと思われる．しかし，いくらか不正確であるにせよ，1 次元の非線形格子が再帰性をもつことは認めなければならないと思う．斎藤信彦，



左から斎藤信彦，著者，
コモ湖にて（1976）．



J. フォード．



W.M. ヴィッシャー（右）．

フォード（J. Ford），後に示すヴィッシャー（W.M. Visscher）などはいろいろの観点から再帰性を吟味した．それらの成果を調べた結果，私は次のような信念に到達したのであった．

多くの場合 1 次元の非線形格子の運動は次第にストカスティックになっていくであろう．しかしこのことは完全な再帰現象を起こすような非線形相互作用が存在すること，言い換えれば積分可能な 1 次元非線形格子の存在を妨げるものではない（存在するに違いない），という信念である．

1.4 ソリトンの発見（1965）

非線形格子に対して連続体近似をとると KdV が導かれることは容易にわかる．例えば，非線形格子の周期波の山を中央に置いておき，周期波の波長を無限に大きくしていった極限を適当に求めれば非線形格子の孤立波を導くことができる．また非線形格子の周期波で格子間隔が波長に比べて非常に小さいとして連続体近似をとれば KdV 方程式の周期波を導くことができることも容易に示される．

非線形格子に比べて KdV 方程式のほうがはるかに計算が簡単であり，波動の非線形効果も容易に理解できる場合が多い．

KdV 方程式にはさらに一つの利点がある．それは尺度の変換が自由なことである．空間の尺度，時間の尺度，それらの符号を好きなように変えても解の性質は変わらないということである．

例えば KdV 方程式で時間 t，長さ x，波の振幅 η（あるいは u）の尺度や符号を変えて

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

とすることもできる．各項の係数や符号を任意にとっても KdV 方程式の内容

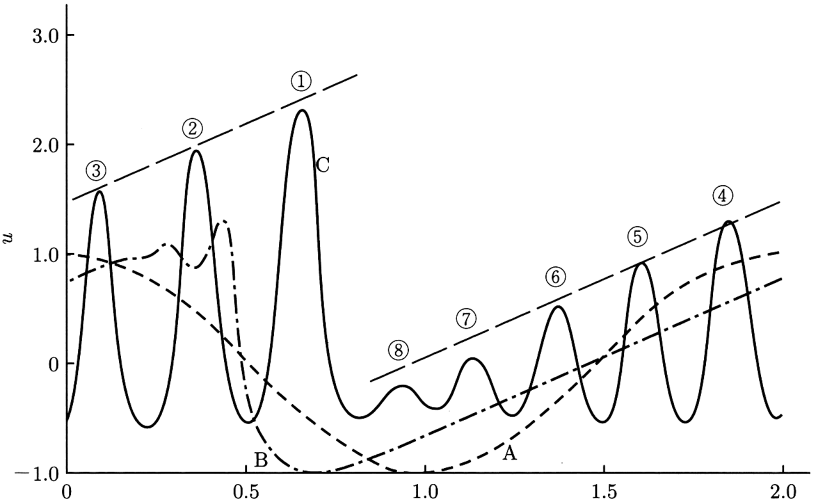


図 1.8　Zabusky–Kruskal による KdV 方程式の計算機実験．A（– – –）初期値，B（— - —）ある時間後，C（—）ソリトンに分離したとき（$t = 0.1t_\mathrm{R}$）．

（解など）は変わらない．しかし係数のとり方によっては孤立解の形が簡単になり，理論の展開が便利になるという利点も生まれる．実際，以下で上の形の KdV 方程式を用いることが多い．

前節で述べたように，Fermi，Pasta，Ulam（FPU）は非線形格子の振動を電子計算機で調べ，いわゆる再帰現象を発見した．彼らは非線形性によってこの体系はやがて熱平衡の状態になると期待したのであるが，体系はしばらくして初期状態に戻ってしまうことを発見したのであった．

ザブスキー（N. Zabusky）とクルスカル（M. Kruskal）は非線形格子を連続体近似した KdV 方程式でも同様の再帰現象が起こるのではないかと考えて数値計算を行い，これを確認した（1965）．この計算において，彼らは周期条件を加えた KdV 系に滑らかな初期条件を与えて出発したのであるが，この初期の波形はたちまち 8 個ぐらいの大小の孤立波の集まりになり，これらの孤立波は互いにほとんど独立に進行することが発見された（図 1.8）．Zabusky と Kruskal はこのような孤立波を「ソリトン」と命名した．2 個のソリトンが衝突すると，一時合体するが，すぐにもとの波形をとり戻して進行する（この現象については 4.3 節で再び述べる）．ソリトンは衝突しても壊れたり消滅したりしないのである．彼らが与えた初期条件はソリトンが多すぎて十分分離していなかったらしいが，ソリトンのきわだった振舞いを示すには十分であったと思われる．とにかくこれは計算機実験が新しい概念へ導いた素晴らしい発見の一つであった（図 1.9 a, b）．

KdV 波の運動がソリトンの集りとして理解できるであろうという見通しが生じた．線形の波動は重ね合わせの原理（フーリエの原理）によって解釈されるのに対し，非線形波動の特長はソリトンを要素として理解できる．

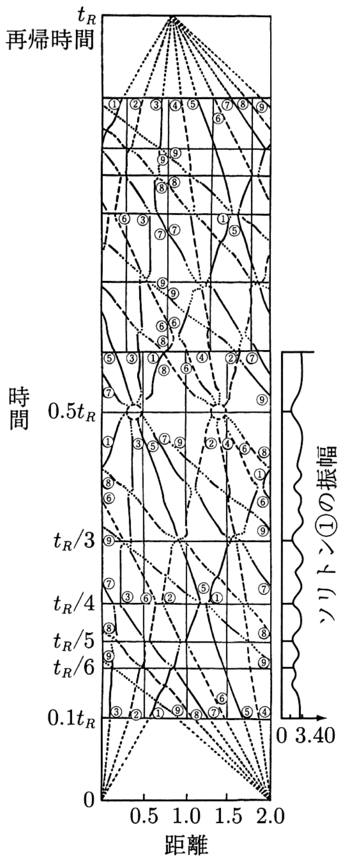


図 1.9 (a)　KdV 方程式における再帰現象．$0.5t_{\mathrm{R}}$ より下は Zabusky–Kruskal の計算結果．その上半分はこれを切り張りして時刻 t_{R} における再帰を分かりやすくしたもの．

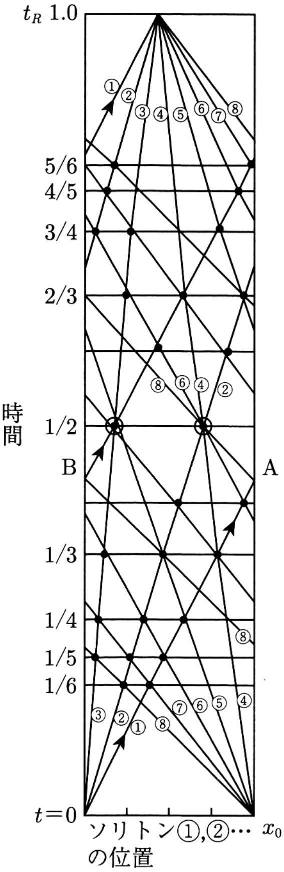


図 1.9 (b)　簡略化したソリトンの経路図（ソリトンどうしの衝突による経路のずれを省略した図）．

1.5　KdV 方程式の解法の発見（1967）

1967 年にはガードナー（C.S. Gardner），グリーン（J.M. Greene），クルスカル（M.D. Kruskal）とミウラ（R. Miura）（合わせて（GGKM））は共著論文で KdV 方程式を解く方法を発表した．これは逆散乱法と呼ばれるようになった方法である．当時 Kruskal などはプリンストン大学にいたので GGKM はプリンストングループと言ってよいと思うが，この論文に先だってミウラ変換と呼ばれる発見や，これに触発されて発見された「ソリトンの固有値」（2.2 節参照）などの研究の発表があったはずである．実際これらは GGKM より後にまとめて発表された．研究の発展速度が著しかったために，このような出版時刻の逆転が起こったものと思う．

KdV の 2 ソリトン解

思い出話をひとつ．

しかし海外からの情報が有意義な場合ももちろんあり得る．それは 2 つのソリトンを含む解（2 ソリトン解）の場合に起こった．

あるとき，数学者ラックス（P.D. Lax）の論文だったと記憶しているのだが，その中に 2 つの孤立波（ソリトン）を含む KdV 波として

$$u(x,t) = 12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{[\cosh(3x-36t)+3\cosh(x-28t)]^2}$$

という式が書いてあった．しかしこの解がどのようにして得られたかなどという説明はなかった．

その当時，2 つの孤立波（ソリトン）を含む非線形格子の解を発見したいと思っていた私は，このちょっと複雑な式に魅力を感じて，ここに解決の鍵を見出せるのではないかと，長い間この式を眺めていたが，そのうちふと，これは何かある式を x で微分したものではないかと感じるようになった．そこで次のような試し算をしてみる．

この場合，時間 t はおそらく問題外だからこれを略して分母の log をとり，それを微分してみると

$$\frac{d}{dx}\log[\cosh 3x+3\cosh x] = 3\frac{\sinh 3x+\sinh x}{\cosh 3x+3\cosh x}$$

となり，もう一度微分してみると（長い計算の後に）

$$\frac{36+48\cosh 2x+12\cosh 4x}{(\cosh 3x+3\cosh x)^2}$$

を得る．これは上式の $u(x,0)$ と同じである．時間 t を入れておいても

$$u(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log[\cosh(3x-36t)+3\cosh(x-28t)]$$

が成り立っていることが確かめられる．

なお，この場合の解 $u(x,t)$ では KdV 方程式を

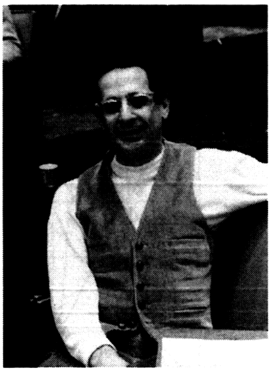
$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

としていることに注意しておこう．

1950 年代の Fermi・Pasta・Ulam（FPU）の研究報告は長い間見ることができなかったという話をしたが，これは 1955 年に Fermi の全集が発刊されてから手に入るようになり，その後さらに 10 年を経た 1965 年頃には *Phys. Rev.* やプレプリントがすぐに入手できるようになった．便利になったが，忙しくなりすぎたという感じもするようになってきた．湯川先生や朝永先生の有名な研究はいずれも第 2 次世界大戦のために海外の論文が入手しにくくなった時期になされたものであった．

クルスカル

初めてクルスカル（Martin D. Kruskal）を訪ねたのはプリンストン大学のプラズマ研究所で，1970年のことだったと記憶している．そのときは彼の協力研究者 Greene たち何人かに紹介された．その後 1979 年にもプリンストンへ行ったが，彼はそのとき大学の数学・天文学教室へ移っていた．フラシュカもアリゾナからやってきて，フランス人のラマニと一緒に私の話を聞いていた．講演が終ったとき，お年寄りらしい人が寄ってきて，「有名なシュワルツシルトの息子です」と言うのでその人の部屋で少し仕事上の話をしたが，非線形格子と直接関係のある話はなかった（「有名なシュワルツシルト」というのは，アインシュタインの重力方程式の厳密解を初めて与えた K. Schwarzschild である．彼がこれを導いたのは 1916 年で，そのとき彼は 43 歳であった）．



クルスカル
（プリンストンにて）．

この訪問のときだったと思うが，クルスカルの母上の誕生会に参加したことがある．母上はミセス・オッペンハイマーと言って，［あの有名な物理学者のオッペンハイマーの親戚であると聞いた．ミセス・オッペンハイマーは米国折り紙協会の会長（当時）であった．誕生日を祝って 30 人ぐらいが集まり，にぎやかで楽しいパーティーであった．

講演会などで見掛けるクルスカル教授は T シャツなどの気取らない服装で，一番前に近い席にいて，首のうしろに U 字型の枕をあて，座ったまま寝ているような格好をしていることが多かった．そしてそのままの格好で講演者に大きな声で質問をする．そのため彼がどこに座っているか，すぐわかるというものである．

申し忘れたが，クルスカル教授は Kruskal 時空などで，一般相対性理論の分野でも有名である．

1.6 バーガーズ方程式

流体力学における粘性流体のナビエ・ストークス方程式の x 成分を書いてみると

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.1}$$

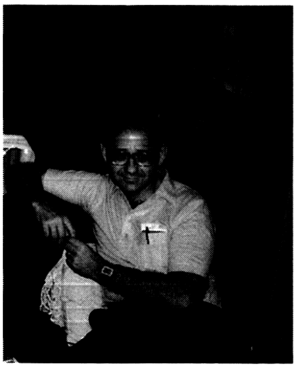
である（μ は動粘性率）．流れを x 方向に限ると（$p=0$ として）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

となる．これは u について最も簡単な非線形方程式であろう．バーガーズ（Burgers）方程式と呼ばれる．1 次元粘性流体のモデルとして，また厳密解が与えられるものとして有名である．

ザブスキー

宇宙の物質の大部分はプラズマであると言われていて，プラズマの研究が重要であるのは当然である．名古屋大学にプラズマ研究所があって，その研究会によく参加したこともあった．プラズマ波の非線形効果に関する研究にもいくつかすぐれたものがあったのを覚えている．



ザブスキー（1983）.

ザブスキー（Norman J. Zabusky）は早くから非線形波動の研究に携っていた．その意味で彼はこの分野におけるパイオニアの一人である．ザブスキーはベル研究所でプラズマ波の理論に携り，非線形波動の基礎へ入っていったのだろう．彼はフェルミらが発見した非線形格子波の再帰現象（FPU）は連続体の非線形波においても同じように起こるに違いないと予見した．彼はまず非線形格子の運動方程式は連続体近似でいわゆるブシネ（Boussinesq）方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

になることを知った．それからクルスカルとの共同研究に入り，ブシネ方程式が，さらに簡単にするとKdV 方程式になることを知った（のであろう）．こうして彼らはFPU の再帰現象がKdV においても起こることを予想してKdV 方程式を数値計算にかけて，その結果からソリトンを発見したのであった．

1968 年に京都で催された統計力学国際会議に出席したザブスキー，モントロール（Montroll），ヴィッシャー（Visscher）などはもちろん私の発明した非線形格子を予めプレプリントなどで知っていた．ザブスキーはそれをexponential lattice（指数格子）と呼んだ．Toda lattice と呼んだのはフォード（J. Ford）である．

実際

$$u = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \log\theta \tag{1.3}$$

（Cole–Hopf 変換）とおくとバーガーズ方程式 (1.2) は

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{1.4}$$

となる．これは1 次元の熱伝導方程式であり，線形の方程式であって厳密解が求められる．バーガーズ方程式は実は非線形ではないのである．

このように一見非線形らしく見えても非線形とは限らないということもある．

また，$\mu = 0$ とするとバーガーズ方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.5}$$

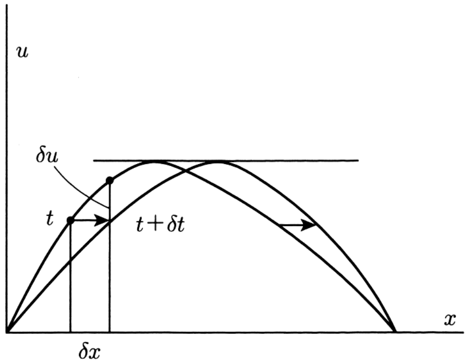


図 1.10　バーガーズ方程式.

となるが，これは $f(x)$ を $t=0$ における u の値として

$$u = f(x - ut) \tag{1.6}$$

によって満たされる．なぜならばこのとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(x-ut)}{\partial t}f' = \left(-\frac{\partial u}{\partial t}t - u\right)f',\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial(x-ut)}{\partial x}f' = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}t\right)f'.\end{aligned} \tag{1.7}$$

これから

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)(1 + tf') = 0 \tag{1.8}$$

を得る．したがって $u = f(x - ut)$ は $\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x = 0$ を満足する．

この式は書き直すと

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\delta t = -\frac{\partial u}{\partial x}u\delta t \tag{1.9}$$

となり，曲線 $u = u(x,t)$ が x 軸に平行に速度 u （時間 δt に $\delta x = u\delta t$）で動くことを記している（図 1.10）．この図のように $\partial u/\partial x < 0$ のところがあると，$u(x,t)$ は時間が経つと多価関数になる．

KdV 方程式はバーガーズ方程式によく似た形をしているので Cole–Hopf 変換のように線形化する方法はないかと吟味された．しかしそのような便利なものは発見されていない．しかしこの吟味の中からソリトンが固有値をもつことが発見され，KdV 方程式の積分方法（逆散乱法）も発見されたのであった．

第 2 章
ソリトンの固有値

2.1 ソリトン解

N 個のソリトンのみからなる解を N ソリトン解と言う．KdV 方程式を

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0} \tag{1.10}$$

としたときの N ソリトン解は

$$\boxed{u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\det B_N} \tag{1.11}$$

と書ける．ここで B_N は N 行 N 列の行列

$$B_N = \left(\delta_{ij} + \frac{c_i c_j}{\kappa_i + \kappa_j}e^{\eta_i+\eta_j}\right). \tag{1.12}$$

ただし

$$\eta_i = \kappa_i x - 4\kappa_i^3 t$$

であり $\det B_N$ はその行列式である．また $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ はクロネッカーの δ 関数，$\kappa_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ は i 番目のソリトンの強さ（大きさ）を表すパラメータ，c_i はソリトンの位置に関係したパラメータである．

2.1.1 ソリトン解

$$u(x,t) = 2\kappa^2\mathrm{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t + \delta) \quad (c = e^\delta).$$

ただし $c = e^\delta$ と書いた．このソリトンは

$$B_1 = \cosh(\kappa x - 4\kappa^3 t + \delta),$$

あるいは

$$B_1 = 1 + \frac{c^2}{2\kappa}e^{2(\kappa x - 4\kappa^3 t)},$$

あるいは

$$B_1 = 1 + \frac{c^2}{2\kappa} e^{-2(\kappa x - 4\kappa^3 t)}$$

で表される（同じソリトン $u(x,t)$ を与える）.

2.1.2　2 ソリトン解

KdV 方程式の解を

$$u(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \varphi(x,t) \tag{1.13}$$

ただし

$$\varphi(x,t) = 1 + A_1 e^{2\eta_1} + A_2 e^{2\eta_2} + A_3 e^{2(\eta_1+\eta_2)},$$

$$\eta_1 = \kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t, \quad \eta_2 = \kappa_2 x - 4\kappa_2^3 t$$

とおき, これが (1.10) を満足するような A_1, A_2, A_3 と κ_1, κ_2 の関係を求めると

$$A_3 = \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)^2 A_1 A_2$$

となる．係数比 A_3/A_1A_2 が定まり，A_1, A_2 の任意性は残る．例えば

$$A_1 = \frac{c_1^2}{2\kappa_1}, \quad A_2 = \frac{c_2^2}{2\kappa_2}$$

としてもよい．この場合は

$$A_3 = \frac{c_1^2 c_2^2}{4\kappa_1\kappa_2} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)^2$$

となり

$$\varphi(x,t) = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{2\eta_1} & \dfrac{c_1 c_2}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{\eta_1+\eta_2} \\ \dfrac{c_2 c_1}{\kappa_2 + \kappa_1} e^{\eta_2+\eta_1} & 1 + \dfrac{c_2^2}{2\kappa_2} e^{2\eta_2} \end{vmatrix} = \det B_2.$$

これは確かに (1.12) を与える.

2.1.3　標準的な 2 ソリトン解

上式から

$$\det B_2 = 1 + \frac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{2\eta_1} + \frac{c_2^2}{2\kappa_2} e^{2\eta_2} + \frac{c_1^2 c_2^2}{4\kappa_1\kappa_2} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)^2 e^{2(\eta_1+\eta_2)}$$

であるが，ここで特に

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = 2, \quad c_1^2 = 6, \quad c_2^2 = 12, \quad \eta_1 = x - 4t, \quad \eta_2 = 2(x - 16t)$$

としてもよく

$$\det B_2 = 1 + 3e^{2\eta_1} + 3e^{2\eta_2} + e^{2(\eta_1+\eta_2)} \tag{1.14}$$

となる.

ここで (1.13) が先に述べた標準的 2 ソリトン解（p.11 のコラム）

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{[\cosh(3x-36t)+3\cosh(x-28t)]^2} \\
&= 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log[\cosh(3x-36t)+3\cosh(x-28t)] \\
&= 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log[\cosh(\eta_1+\eta_2)+3\cosh(\eta_2-\eta_1)] \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

と同じ結果を与えることを示そう．双曲線関数の公式により

$$
\begin{aligned}
&\cosh(\eta_1+\eta_2)+3\cosh(\eta_2-\eta_1) \\
&= \cosh\eta_1\cosh\eta_2+\sinh\eta_1\sinh\eta_2 \\
&\quad +3[\cosh\eta_1\cosh\eta_2-\sinh\eta_1\sinh\eta_2] \\
&= 4\cosh\eta_1\cosh\eta_2-2\sinh\eta_1\sinh\eta_2 \\
&= (e^{\eta_1}+e^{-\eta_1})(e^{\eta_2}+e^{-\eta_2})-\frac{1}{2}(e^{\eta_1}-e^{-\eta_1})(e^{\eta_2}-e^{-\eta_2}) \\
&= e^{-\eta_1-\eta_2}\{(e^{2\eta_1}+1)(e^{2\eta_2}+1)-\frac{1}{2}(e^{2\eta_1}-1)(e^{2\eta_2}-1)\} \\
&= \frac{1}{2}e^{-\eta_1-\eta_2}[2\{1+e^{2\eta_1}+e^{2\eta_2}+e^{2(\eta_1+\eta_2)}\} \\
&\qquad -\{1-e^{2\eta_1}-e^{2\eta_2}+e^{2(\eta_1+\eta_2)}\}] \\
&= \frac{1}{2}e^{-\eta_1-\eta_2}\{1+3e^{2\eta_1}+3e^{2\eta_2}+e^{2(\eta_1+\eta_2)}\} \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

ここで最後の式の因子 $e^{-\eta_1-\eta_2}/2$ は (1.15) において何も寄与しないので無視してよい．したがって (1.14) は (1.16) と同等に作用することが示された．

2.2 ソリトンの固有値

KdV 方程式を

$$
\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0} \qquad (1.17)
$$

とする．ここで第 2 項の符号をマイナスにすることができるのは，係数と符号を任意に変えても KdV 方程式の本質は変わらないという事実を利用しているのだが，-6 としたのは u が次に述べる固有値問題が簡単に書けるように係数を選んだのである．

2.2.1 KdV 波の固有値

ここで天下り式であるが，上の KdV 波 (1.17) に付随する固有値方程式（KdV 波の固有値方程式）として

$$
\boxed{\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u\right)\psi=\lambda\psi} \qquad (1.18)
$$

を考える．境界条件は $x\to\pm\infty$ で $\psi(x)\to 0$ とする．

このとき次の定理が成り立つ．

$u(x,t)$ が KdV 方程式 (1.17) にしたがって時間的空間的に変化するとき，t をパラメータとする方程式 (1.18) の固有値 λ はすべて一定に保たれる（λ は t によらない．これを KdV 波に付随する固有値（略して KdV 波の固有値）と呼ぶことにしよう）．

方程式 (1.18) は量子力学のシュレーディンガー方程式と同形なのでシュレーディンガー方程式と呼ばれる．ここで KdV 波 $u(x,t)$ はポテンシャルに相当する．

2.2.2　ソリトン波の固有値

ただ 1 個のソリトン

$$u(x,t) = -2\kappa^2 \mathrm{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t + \delta)$$

がある場合，その深さは $-2\kappa^2$ であり，固有値 λ はその半分，すなわち

$$\lambda = -\kappa^2$$

であることが示される（図 1.11）．なおこのとき固有関数は

$$\psi(x) = C\ \mathrm{sech}[\kappa(x - x_0)]$$

で与えられる．ただし C は任意の定数であり，x_0 はソリトン $u(x,t)$ の中心の x 座標である．

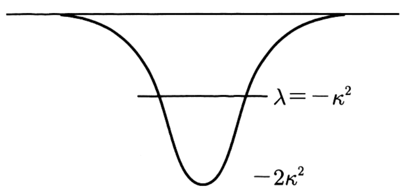


図 1.11　ソリトンの固有値 λ.

2.2.3　2 ソリトンの固有値

すでに述べたように 2 個のソリトンを含む KdV 波は例えば

$$u(x,t) = 12\frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[\cosh(3x - 36t) + 3\cosh(x - 28t)]^2}$$

で与えられる．その初期値（$t = 0$ の値）は

$$u(x,0) = -6\ \mathrm{sech}^2 x$$

であって，これに対する固有値は 2 つあり，

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

で与えられる（図 1.12）．この場合，時間が経つにつれて波形は変形し，2 個のソリトンの衝突を表すのである．

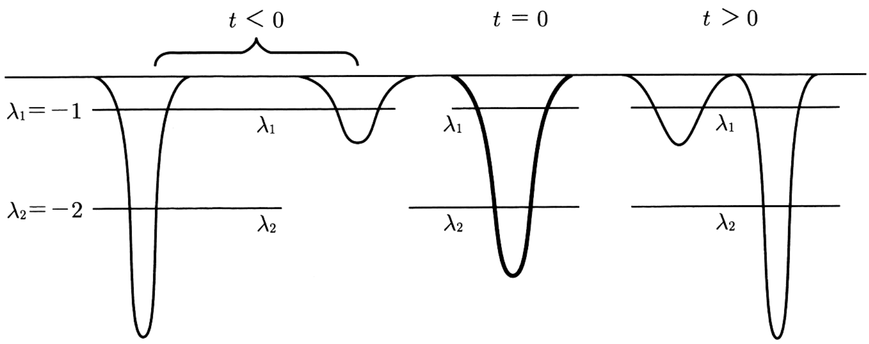


図 1.12　2 個のソリトンと固有値 λ_1, λ_2．ソリトンは衝突のとき変形するがソリトンの固有値（λ_1, λ_2）は不変（保存量）．

2.2.4　*N* ソリトン波の固有値

$$u(x,0) = -N(N+1)\mathrm{sech}^2 x \quad (N \text{ は正の整数})$$

であれば，その固有値は N 個あって

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2^2, \quad \lambda_3 = -3^2, \quad \cdots, \quad \lambda_N = -N^2$$

であることが示される．

この場合も時間が経つにつれて波形は KdV 方程式にしたがって変形するが，固有値は不変に保たれ，N 個のソリトンの運動を与えることになる．

2.2.5　固有値が等間隔の場合

初期の波形が

$$u(x,0) = a^2 x^2 \tag{1.19}$$

の場合の固有値は等間隔である．それはハミルトニアンが

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

の単振子のエネルギー固有値が $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ であることを考えて，シュレーディンガー方程式を書くと

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)\psi = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\psi \tag{1.20}$$

となる．ここで変換

$$\xi = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}x, \quad a = \frac{\hbar\omega}{2}$$

を行うと (1.20) は

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + a^2\xi^2\right)\psi = (2n+1)a\psi$$

となる．これと (1.19) に付随する固有値方程式

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a^2\right)\psi=\lambda\psi$$

とを比べれば (1.19) に対する固有値は

$$\lambda=(2n+1)a$$

であることがわかる．

2.2.6 固有値は保存量である

$u(x,t)$ が KdV 方程式にしたがって変化する KdV 波であるとき，固有値方程式

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,t)\right)\psi=\lambda\psi \tag{1.21}$$

の固有値 λ は時間によらないことが示されることを示しておこう．すなわち

$$\frac{d\lambda}{dt}=0$$

であることを示す．

［**証明**］ まず固有値方程式 (1.21) を書き直して

$$u=\lambda+\frac{\psi_{xx}}{\psi} \tag{1.22}$$

とする（ここで $\psi_{xx}=\partial^2\psi/\partial x^2$ と書いた）．同様に $\lambda_t=d\lambda/dt$, $u_x=\partial u/\partial x$, $u_{xxx}=\partial^3 u/\partial x^3$ などと書く．これらの微係数を計算してうまくまとめると

$$\lambda_t\psi^2+[\psi Q_x-\psi_x Q]_x=0 \tag{1.23}$$

を得る．ここで

$$Q=\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x$$

と書いた．

(1.23) の第 2 項は x について完全微分になっているから x で積分すると体系が周期条件か無限遠で u が消える条件の下で，$\lambda_t\int\psi^2 dx=0$ となる．したがって $d\lambda/dt=0$．すなわち固有値 λ は時間によらない．

このように，KdV 方程式に付随するシュレーディンガー型の固有値方程式の固有値は時間によらない．KdV の初期値 $u(x,0)$ が与えられれば固有値はすべて与えられる．N 個のソリトンが存在するときは N 本の固有値があり，これらのソリトンが近づき，衝突し，離れる過程において，N 本の固有値は変わらずそれぞれ一定に保たれる．KdV 場の時間的発展は固有値保存の変形なのである． （証終）

2.3 エネルギー伝達（1967）

2 次元の結晶格子模型を用いて波の伝播を数値的に調べたのはヴィッシャー（W.M. Visscher, ロスアラモス研究所）であった．その結果は映画および解説

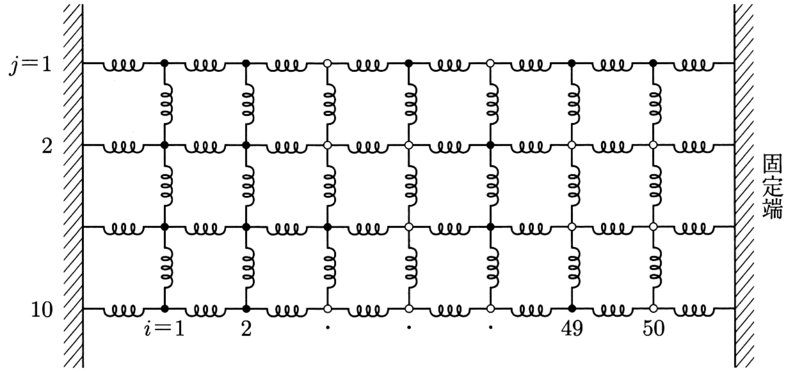


図 1.13　2 次元格子（j 方向には周期条件）.

として 1967 年の会議で報告されている（図 1.13）.

結晶格子の粒子間相互作用が非線形であると格子を伝わる波は互いに散乱し，そのためにエネルギーの流れは阻害されると考えられていた．しかし Visscher の計算機実験によると不純物が多数入った非線形格子のエネルギー伝達は同様に不純物の入った線形格子よりもかえってよい場合が多く，非線形性はむしろエネルギーの伝達をよくすることが明らかにされた．これは計算機実験が常識あるいは直観と異なる新事実を示す典型的な例の一つであった.

現在の知識では，非線形のためにソリトンがエネルギーを伝え，ソリトンの進行は不純物によってあまり阻害されないことが，非線形格子のエネルギーの流れを高める役をしていると解釈される．実際 Visscher の計算結果を表す図 1.14 では小さな波よりも速く伝わるソリトンが明らかに現れていた．しかしこの計算からソリトンの概念を考え出した人は一人もいなかったのである.

図 1.14 は Visscher の実験結果の一例である．(a) は線形格子，(b) は非線形格子．右手前にパルスを与えたときの波の伝播（同じ時間）．(b) で先頭を進むのはソリトンであろう．（共に重い不純物原子が 15%入った格子）.

なお，ふつうの物質では，熱エネルギーの流れが温度勾配に比例するという

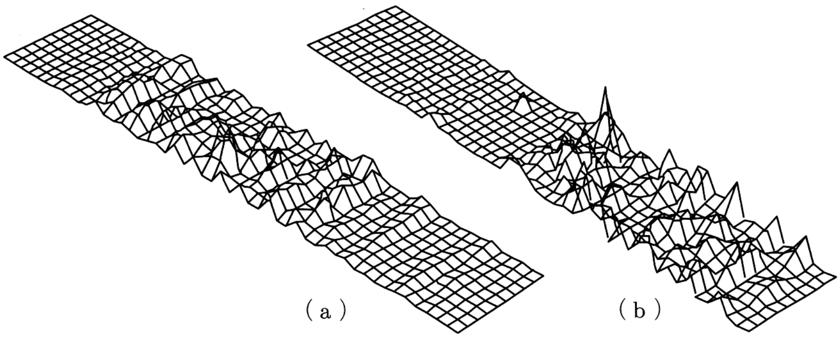


図 1.14　右下にパルスを与えてから，同時間経った後の 15%の重い不純物を含む格子へのエネルギー伝達．(a) は線形格子，(b) は非線形格子．（Visscher らによる）.

フーリエの法則が成り立つが，上に述べた簡単なモデルでは，フーリエの法則は成り立たない．

2.4 非線形破壊

非線形波動が特有な破壊現象を起こす可能性があるのではないか，と考えて数値計算をしてもらったことがある．

指数格子のすべてのバネが，引っぱったときにある臨界の力で切れてしまう，としておく．一般に，コンクリートの建物や橋などは引き伸ばされたときに切断しやすいと考えられるから，これは破壊現象の一つのモデルになっているのではないだろうか（図 1.15）．

ここで考える構造は固定端と自由端をもっているとする．この系を伝播するソリトンは圧縮波であるが，固定端では同振幅の圧縮波として反射される．自由端では，伸長波として反射されるが，このとき入射波と反射波とが自由端の近くで干渉すると大きな振幅になるためにバネの破壊が起こると思われる．すると新たな自由端ができて，そこで反射した波がさらに破壊を起こす．こうして同じような現象が繰り返されて，次々と破壊が起こるのではなかろうか．

臨界張力を $f_{\mathrm{c}} = 0.92$ とし，これより少し小さい張力 $f_i = 0.90$ を全体に与えておき，自由端をハサミで切った後の時間的変化をシミュレートした．その結果の一例を図 1.16 に示す．時間の原点は自由端を切断した瞬間にしてある．波は一度固定端まで行って往復したときに最初の切断が起こり，次いで自由端の近くで数回の連続切断 A, B, $\cdots$ が生じている．これは予想通りのようである．

しかし，破壊がいったんやんでからしばらくして第 2 回目の連続切断が起こる．C, D, $\cdots$ というようなことが，だんだん頻繁に起こるようになり，格子は細かく切れてしまう．

だいたい予想した通りのようであるが，自由端でないところでも切断が生じているように見える．これは次のように考えられるかもしれない．Zabusky と

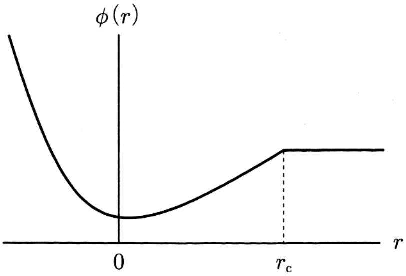


図 1.15　切断のあるポテンシャル．

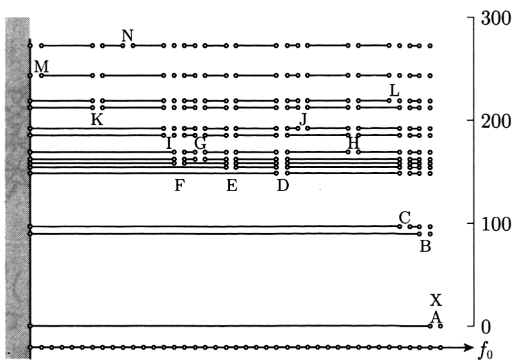


図 1.16　40 個の要素からなる非線形格子の破壊の例．

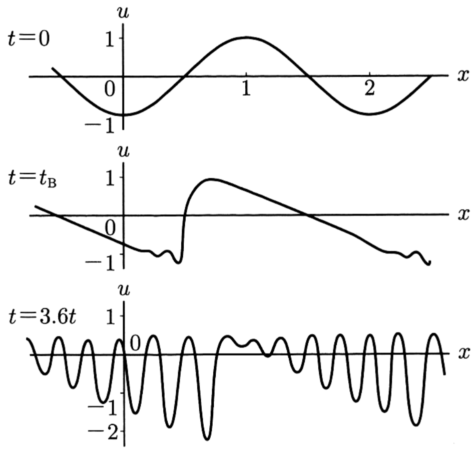


図 1.17　正弦波の初期条件からのソリトンの出現.

Kruskal のソリトンを発見した数値実験では，初期条件として滑らかな波 $\cos\pi x$ を与えたのが，次第に鋭いソリトンに変化している．このとき歪みは初期値の約 2 倍に達する（図 1.17 下の図）．このソリトンは圧縮波パルスであると思われるが，これが格子を細かく切断しているのかもしれない．そうであれば，これこそソリトンにふさわしい破壊現象である．

大きな建物や橋などでこのような非線形破壊が生じないことを念願する．

もちろん上述の計算はいろいろな条件の下に詳しく吟味する必要がある．

熱化遷移

一様な固体の中の振動，あるいはプールの水の水面の波を考えよう（もっと簡単に両端を固定した一様なひもの振動でもよい）．

簡単な波は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

で記述される．しかしこの振動はいつまでも続くわけではなく，次第に減衰する．そして（外へエネルギーが逃げないとすると）エネルギーは熱振動に変わる．熱は熱伝導方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

で記述される．この物体の中の運動の様相をマクロ的に捉えると

波動方程式 → 熱伝導方程式

ということになる．この 2 つの方程式を一つにまとめて記述するミクロ的な立場はつくれないであろうか．

第 3 章
格子振動グループの発足

1960 年代の初めの頃に戻ろう．その頃，結晶格子の振動をモデル化して，不純物を含む体系の局在振動や非線形波動を厳密に扱うことによって数理物理学に寄与しようとする研究グループが生まれ，10 年以上にわたって著しい成果を挙げることができた．

3.1 グループの始まり

物理の理論では，自然を記述する理論式があり，これを解くという問題がある．理論式は自然をモデル化したもので，そのためにある程度の省略，あるいは近似を含む．また理論式を解くときに近似が入ることが多いが，これらのための不確かさはできるだけ避けたいものである．

1950 年代には，少量の不純物を加えることによって半導体の性質を微妙に変える研究が盛んであった．これを遂行するには，電子準位のギャップにできる不純物準位に関する正確な理論が必要であった．この場合，ある近似解によれば不純物は電子帯の端をぼやけさせることになるが，電子計算機を用いた結果によれば，不純物準位のスペクトルには鋭いピークをもつことが期待された．

半導体の電子状態の不純物による変化をモデル化した理論は，不純物を含む結晶の格子振動の理論によく似ている．そして後者のほうがより簡単であることが知られている．

その頃，イギリスのディーン（P. Dean）たちは，当時盛んになり出した電子計算機を用い，不純物の入った格子の固有振動のスペクトルを厳密に調べた．その結果によれば格子振動は軽い不純物によって生ずる鋭いスペクトルをもち，振幅自身が軽い不純物のところで鋭い山をもつことが示された．このような局在振動は，2 次元や 3 次元の格子よりも 1 次元の格子において著しく現れる．

一般に摂動計算に付随しがちな不確かさを避けて，厳密な取扱いを研究しようとする動きもあった．それは当時 1950 年代に電子計算機やそれによって得



寺本　英(1967).



松田博嗣（1967).



京都大学基礎物理学研究所（湯川記念館).

られる結果の映像化技術の発達に助けられたということもある．1950 年代の終りには寺本英さん（京都大学）の呼びかけによって厳密解法を志す人たちのグループができた．初めこれは 10 人程度であったが，研究会を毎年，京都大学基礎物理学研究所（湯川記念館）で開き，次第に大きなグループに発達した．研究の具体的な対象として，初めは不純物の入った結晶格子が主になったので，このグループは「格子振動グループ」とか，少し後にソリトンの研究が目立つようになったので「ソリトングループ」とか呼ばれるようになった．また 1960 年代の半ばからは非線形波動の研究が盛んになったので，「非線形グループ」などとも呼ばれ，物理学会の研究会においてはそのような名前の分野として認知されるようになった．

電子計算機はこの時代に大きな発展を遂げ，科学全体に世界的な改新をもたらしつつあった．歴史的に見れば，科学に観察と実験がとり入れられて以来の大改革であったと言っていいだろう．電子計算機は計算速度を速めるばかりでなく，自然界にない状況を作り出し，現実にない純粋な物質を構成することもできる．その改新のはしりが Dean などによる不完全結晶の解析などだったのである．松田博嗣さんはこのショックを「before computer（B.C.）の時代から after Dean（A.D.）の時代へ科学は変わった」と表現した．もちろんこれは B.C.（紀元前）と A.D.（紀元後）をもじった言葉である．

軽い不純物原子の周りで固有振動の振幅が局在し，スペクトルに独特な欠陥が起こることが松田博嗣さんや堀淳一さんの素晴らしい理論によって明らかにされた（その後，寺本英さんは生物系の生物物理学へと移り，松田博嗣さんは京都大学から九州大学へ替わって集団遺伝学の研究へ移った).

当時，基礎物理学研究所の研究会は京都を離れた遠方の大学などで催されることが稀ではなかった．これは研究者どうしの連絡を密にし，グループの精神を宣伝するためにも必要なことであり，実際有効なことであった．写真などの記録によれば 1962 年 6 月の（このグループの 3 回目の）研究会は札幌（北海



旧東京教育大学高原生物学研究所（菅平）（画・戸田盛和）.

大学院

1965 年の研究会は京都であり，遠足には清瀧へ行っている．大学院生の間でそのときだったか，それとも奈良へ遠足したときのことだったか，「大学院」という言葉についておかしな論争があったのを覚えている．それは「院」というのは何を意味するのか，というようなことだった．院という言葉は広く使われている．平等院，知恩院，法然院などはお寺だし，曼殊院，修学院もある．後白河院は院政だ．寂光院，建礼門院，崇徳院，青蓮院などと大学院生はなかなか博識である，と思うと病院，養老院，少年院，衆議院，参議院，正倉院，人事院などというのもある．院というのは人に関係があるが，人が出入りする建物を指す言葉でもあるが，その間の関係は必ずしも明らかでない．そこが問題点であったが，どう決着したか覚えていない．

道大学）で行われた．この年は結晶欠陥の国際会議が京都であって，我々のグループもこれに参加し，イギリスから来た Dean，アメリカからの Rubin などと親しく研究交流を行った．1963 年 10 月の研究会は松江の宍道湖に面した旅館で行われた．松江は寺本英さんの郷里であり，旅館の主人は彼の友人であった．1964 年の研究会は菅平の高原生物学研究所で行われた．これは東京教育大学の施設で私が世話人をつとめた．研究所の宿帳に（論語の言葉をもじって）『高原令色少なし塵』と書き残したが今でもあの帳面は残っているだろうか．

1962 年北海道大学で行った研究会では，このグループの研究をまとめて出版しようという動議がなされ，この年からだいたい 4 年ごとに研究会報告がまとめられた．基礎物理学研究所発行の *Supplement of the Progress of Theoretical Physics* 1962, 同 1966, 同 1970, 同 1976 がこれである．

また，この研究会では寺本さんがカリスマ性を発揮して，論文の中の記号を統一しようと言い出したので，これらの研究報告ではだいたい決まった記号が用いられている．例えば原子の質量は大文字の M，M' などとし，バネ定数は大文字の K，K' などとする，といった具合である．

1962 年の報告は，時間に依存しない問題と時間に依存する問題，および赤外吸収や固体表面などの実験に関する問題の 3 つに分類されている．これで研究にある種の方向性をもたせようとする意図だったと解釈される．

3.1.1 浅水波の KdV 方程式

1966 年の 10 月から 1967 年の 3 月まで，学術振興会の援助により筆者は京都大学に滞在した．これはかねてから寺本さんが努力して下さった成果であって，短い期間ではあったが，京都大学の理学部，基礎物理学研究所，数理解析研究所，その他の方々と研究的な交流する機会をもつことができたのは大きな幸であった．

京都大学の理学部や基礎物理学研究所と名古屋大学の理学部やプラズマ研究所には多くの流体力学の大家がおられた．流体力学はナビエ・ストークスの基礎方程式がそもそも非線形である．バーガーズ（Burgers）方程式という空間が 1 次元の粘性流体という理論上の創造物は，粘性をゼロとおいたときとゼロに近づけたときとでは全く違う振舞いをするとか，浅水波を表すコルテヴェーグ・ドフリース（Korteweg–de Vries, 略して KdV）方程式は孤立解と周期解をもつことが 80 年以上前に知られていたなどということも，実はこのとき初めて教わったのであった．

3.1.2 波と粒子とソリトン

物理学では昔から空間・時間と物質・運動が基礎的な要素である．そして運動としては粒子の運動と波の運動とが要素的である．昔は X 線や陰極線が粒子であるか，波動であるかという論争もあった．量子力学では，粒子であり波動であるなどと 2 重性が問われたりする．

波は空間的に広がったもの，粒子は空間的に集中したものと言う．

さらに波は重なり合い，互いに通過する性質があり，粒子は衝突して方向が変わるものとも言う．

ソリトンは両方の性質を備えているものである．

繰り返し述べたように，ソリトンは浅水波を記述する KdV 方程式の研究から始まった．1965 年に Zabusky と Kruskal により KdV 波の計算機実験の中で発見されたのであったが，浅水波，界面波，大気中の界面波，津波なども，ソリトンと関係があると言ってよいだろう．木星の大赤斑と呼ばれるものもそうである．エネルギーや運動の集中して安定化したもの，そのかたまり，前線なども一般にソリトンと言えるだろう．ソリトンとして研究されているものを列

挙してみたことがある．次のようになった．

流体中の渦糸の運動
磁壁，転位の運動
音・熱のショック
セル・オートマトンのソリトン
素粒子，インスタントン
結晶の転移
結晶の成長面
イオンプラズマ
ポーラリトン（自己誘導透過）
超伝導体中の磁場の貫通
プラズマ中の電磁波の貫通
高分子ポリアセチレンの不対電子の運動
ダビドフ・ソリトン
神経の電気信号パルス
筋肉収縮のエネルギー伝達
動脈中の血液の流れ
光ソリトン
光通信

最近の天災では，地震波，津波，集中豪雨，竜巻などの被害に関係してソリトンの研究が強く望まれるものが多い．

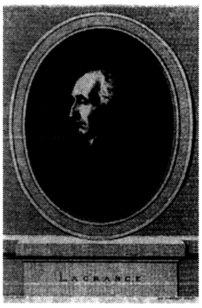
ソリトンは周囲をひずませ，それが自身を集束安定化させることによって生じる．ソリトンの効用と同時に被害を起こす負の偉力にも注目しなければならない．

3.1.3　ブラウン運動の模型

格子振動グループの人たちが同じ問題を少し違った方法で扱うことがあったのも当然である．そういうときは論争にならなくても競争のような雰囲気も生じた．例えば完全格子の中に軽い不純物を入れたときに固有振動のスペクトルがどのように変化するか，局在振動がどのように変化するかという基本的な問題があった．これはスペクトル密度がゼロになる特殊振動数（3.3.5 節参照）があるという見事な発見につながった．

私も関係した問題の一つにブラウン運動に似た運動があった．それは非線形に長い 1 次元の完全格子の中に 1 個の重い粒子を入れ，全体を一様な温度に保ったときの重い粒子の運動の問題である．結論としては重い粒子の質量を十分大きくすればその運動は完全なブラウン運動になるというのである．この問題はノルウェーのヘンマー（P.C. Hemmer）が解いて博士論文に記している．つい

ラグランジュ



ラグランジュ（Joseph Louis Lagrange, 1736–1813）は「解析力学」のラグランジュ方程式や変分法の完成で名高い．フランス人であるがフリードリッヒ2世に頼まれてベルリンで20年を過ごしている．フランスへ戻ったが，革命が始まって危ない目にもあった．ナポレオンのロシア遠征の間に亡くなった．

オイラーよりも約30歳若かったが，オイラーの流体力学と異なる観点の理論を作る努力をしてラグランジュの流体力学の方程式に到達した．しかし実際の問題にはオイラーの理論のほうが使いやすいことを認めたと言う．こうして流体力学の基礎方程式は樹立されたが，これを実際の条件に合わせて解くのはなかなか難しく，ラグランジュの言葉を借りれば——

「(流体力学の基礎方程式を）完全に解くことは，おそらく常に解析の能力を越えるものであろう．そして厳密な計算のできるのは極めて小さい（あるいは特別な）運動の場合だけである」．

流体力学の方程式は（オイラーにしろラグランジュにしろ）見たところは簡単であるが，これに含まれる内容は非常に広大である．この方程式は本質的に非線形であるし，実は無限の粒子を含むものである．質点の力学が3体問題ですら一般には解けないのであるから，無限の粒子を含む流体力学の基礎方程式が一般に解けないのは当然であるかもしれない．オイラーやラグランジュの流体力学の対象としている流体は人間が作り出した素晴らしい発明品であるという気もする．

でこれを知らないでアメリカのルビン（R.J. Rubin）が独立に解いているが，さらに武野正三さんが別の方法で解き，私もまた別の方法で解いている．一つの問題を4人の人が少しずつ違った方法で解いたわけで，方法の吟味，比較ができ，たいへん面白かった．

なお，Rubin は Hemmer の仕事を知らずに問題を解いた．これに気づいたのは Hemmer の先生だったウェルゲランド（H. Wergeland）で，Rubin にそのことを注意し，ルビンはそれをすぐ理解したという話である．

3.2 熱伝導の問題

この方向性の中から，私は熱伝導（エネルギーの流れ）の問題を感じとった．より具体的に言えば，結晶格子の中の同位体，あるいは不純物による格子波の散乱，および原子の相互作用の非線形性の影響とである．

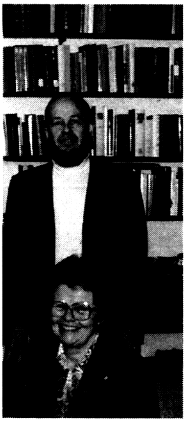
結晶の原子が完全に等しい質量をもち，完全に規則的に配列している格子を形成していて，原子間の相互作用が完全にハーモニック（調和的，線形格子）であれば，結晶の振動はすべて独立な音波として振る舞い，エネルギーは全く抵

抗なしに伝達される．この状況では，エネルギーの流れが温度勾配に比例するというフーリエの定理は成立しない．

しかし実際の結晶では原子間の相互作用の本質のために原子間相互作用は完全に線形ではあり得ず，必ず非線形性が存在する．ここで線形というのは2つの原子の位置を x_1，x_2 としたとき，相互作用がポテンシャル $\frac{K}{2}(x_2-x_1)^2$ で表される場合であり，非線形というのはポテンシャルがこれからはずれて，例えば $\frac{K}{2}(x_2-x_1)^2+\frac{\alpha}{3}(x_2-x_1)^3$ で表される場合である（この場合，第2項が非線形項である）．

昔パイエルス（Peierls）は，原子間相互作用の非線形項のため格子波が散乱される影響をとり入れて熱伝導の理論をたてた．この場合，格子波のエネルギーはフォノン $h\nu$（h はプランク定数，ν は振動数）の粒子として取り扱われる．フォノン気体の状態は各振動数のフォノンの数（分布）によって表され，その変化は非線形項によって生じるわけである．パイエルスの理論ではこの変化が

ルビン



ルビン（1979）．

ルビン（Robert J. Rubin）はワシントン D.C. にある National Bureau of Standards の研究者であるが，統計力学や生物物理などの理論を長く続けていて，何度か来日している温厚な紳士である．奥さんはカーネギー研究所の研究員で，最近大きな議論になっている暗黒物質（ダークマター）が宇宙の銀河に存在する証拠を発見した天文学者である（『宇宙を見つめる人たち』新潮文庫，1993）．お世話になった日本の天文学者も多いらしい．お二人は日本へ来て，別々の学会に出席したり，一緒に西穂高へ登ったりしている．寺本英さんとテニスをするためにラケットをもって来日したこともあった．

あるときは一緒にキットピーク天文台へ行き，ワシントンの家へ泊る旅行プランだったが，私がヘルペスにかかったためお流れになってしまった．彼は日曜大工で私の泊る部屋を改造したりしていて，たいへん残念なことだった．それで彼らが毎日のようにジョギングをするという道を通って彼の友人の家まで歩いて行った．友人は立体幾何を趣味としているのだそうで，何本かの木の棒とひもで変形する多面体を作る方法を教えてくれた．それにしたがって作った多面体は今でも私の書斎の天井からぶら下がっている．

またあるときは，ある物理学者が書いた一冊の少し古い本を見たく思っていることを話したところ，ルビンさんはそれを見つけ出して送ってきてくれた．

あれこれとお世話になったルビンさんであり，毎年クリスマスカードを交換してきた仲であった．そして「私も停年になりましたが，まだ役所の仕事も続けています」という手紙をもらってから数年たち，彼からの便りが途絶えてしまった．

不可逆な熱伝導を引き起こすと仮定している（いわゆるマスター方程式を仮定していることになる）.

しかし厳密な扱いでは不可逆現象の基礎を力学の基礎方程式から導くことが期待されるわけである.

なお，フォノンの振動数の変化は非線形項だけではなく，不純物の質量の違いによるフォノン波の散乱のためにも生じる．実際の固体はいくつかの同位体の元素を含むので，ふつうの固体でも純粋であるわけではない．それぞれの同位体は互いに不純物としてフォノン波を散乱したり分割したりする．ふつう熱伝導率などと言うときはそのような影響も含んでいるし，元素の異なる不純物やいわゆる格子欠陥の影響も含んでいる．格子欠陥などの影響は短い波長のフォノン，したがって極低温において顕著に現れることになる.

熱伝導の基礎を考える上では，少なくとも

(i) 質量が違う不純物（同位体）を含む結晶格子,

(ii) 原子間の相互作用が非線形な結晶格子

の 2 つの問題を厳密に扱わなければならないことになる．(i) の問題から，次に述べる dual system（双対性）が発見された．さらにこれを用いて 1 次元非線形格子が発見されている．しかし，熱伝導問題の解決はまだ遠くにあるといった感じである.

余談であるが，1962 年の夏に京都で開催された結晶欠陥の国際会議は，結晶格子のティスロケーション（転移）やカラーセンターなどの応用物理的な研究をしている人たちが企画したものであって，我々の格子振動グループとは全く関係ないものであった．しかしこの会議に外国から応募してきた人たちの中には我々のグループと密接に関係している研究者が 10 人程度もいることがわかった．そのときになってこの国際会議を準備している人たちから我々のところに参加要請があり，我々もこれに応じて，格子振動グループのための部会が付加されることになった．こうして結晶欠陥の国際会議に来日した R.J. Rubin, J. Mahanty, P.G. Klemens などと研究交流の機会を得られたのであった．彼らとのインフォーマルな議論は我々のグループに大きな刺激となり，同時に我々の研究に大きな自信を与えることともなった.

3.3 1 次元格子の局在振動

1 次元格子に関する基本的なことを最初にいくつか述べることにする.

まず初めに，一様な連続体では，無限に低い振動数波動（固有振動）から，無限に高い振動数の波までが存在する．固有振動数を ω_μ とすると $(0 < \omega_\mu < \infty)$，これに対し，一様な 1 次元格子（不連続構造）では，固有振動数には上限 ω_L がある $(0 < \omega_\mu < \omega_L)$．波の速さは振動数によって違う．また ω_L 以上の高振動の波は伝わらない.

質量の違う2種類の原子（粒子）が1つおきに規則正しく並んだ1次元の規則格子では，音響的振動領域 $0 < \omega < \omega_a$ と光学的振動領域（$\omega_o < \omega < \omega_L$）とがあり（$\omega_a < \omega_o$），$\omega_a$ と ω_o の間には波の伝わらないスペクトルギャップがある．多数の原子を含む規則格子では多数のギャップがあり得ることが示される．

軽い原子を入れると局在振動が生じる．

3.3.1 一様な連続体の波動

参考のため，一様な連続体について述べておく．

1次元の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

と書ける．波動を

$$u = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

とおくと，λ を波動，ν を振動数として $k = 2\pi/\lambda$ は波数，$\omega = 2\pi\nu$ は角振動数で

$$\omega = \pm ck$$

である（$\omega = 0 \sim \pm\infty$）（図 1.18）．

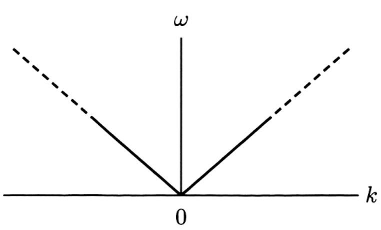


図 1.18　連続体のスペクトル．

3.3.2 規則格子

質量 m の原子が力の定数 K のバネで結ばれた1次元格子を考えると（図 1.19），n 番目の原子の変位を u_n として，運動方程式は

$$m\ddot{u}_n = -K(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1})$$

と書ける．解を

$$u_n = Ae^{i(kn-\omega t)}$$

とおく．周期的境界条件（原子の数を N とする）

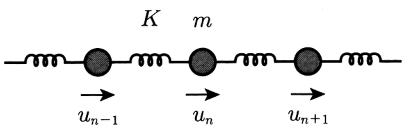


図 1.19　一様な格子.

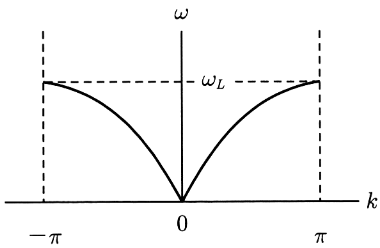


図 1.20　一様な格子のスペクトル.

$$u_{N+1} = u_1$$

を採用すると，k と ω は下の k_μ と ω_μ に限られる：例えば N が偶数のときは，

$$k_\mu = \frac{2\pi\mu}{N} \quad \left(\mu = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \cdots, 0, \cdots, \frac{N}{2}-1\right),$$
$$\omega_\mu = \omega_L \sin\frac{\mu\pi}{N} \quad \left(\omega_L = \sqrt{\frac{4K}{m}}\right). \tag{1.24}$$

これらが基準振動である.

相隣る原子間距離を a とすると，波の速さは

$$c_\mu = \frac{\omega_\mu}{k_\mu/a} = \sqrt{\frac{4K}{m}}\frac{\sin\frac{k_\mu}{2}}{k_\mu}a.$$

μ を固定して $N \to \infty$ とすると，波長の長い波の速度 c として

$$c = \sqrt{\frac{K}{m}}a$$

を得る.

連続体の場合と違って格子の場合は最大の振動数 ω_L がある（図 1.20).

3.3.3　2 原子規則格子

奇数番目の原子の質量を m，偶数番目の原子の質量を M とする（図 1.21).
基準振動数 ω は

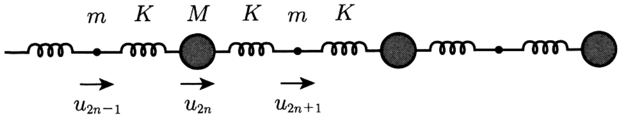


図 1.21　2 原子規則格子.

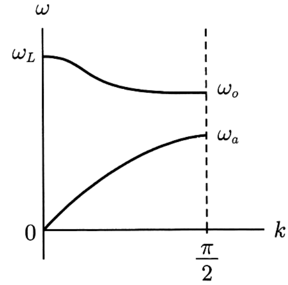


図 1.22　2 原子規則格子のスペクトル.

$$\omega^2 = K\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-\frac{4\sin^2 k}{mM}}\right\}. \tag{1.25}$$

(特に $M = m$ のときは

$$\omega^2 = \frac{2K}{m}(1-\cos^2 k) = \frac{4K}{m}\sin^2 k$$

となり，(1.24) と一致する)．

(1.25) において複号の + をとった上の分岐 $\left(\omega_o \sim \omega_L = \sqrt{2K(\frac{1}{m}+\frac{1}{M})}\right)$ が光学的振動である．また複号の − をとった下の分岐 ($0\sim\omega_a$) が音響的振動である．添字 o は光学的分岐 (optical branch)，添字 a は音響的分岐 (acoustic branch) を意味する (図 1.22)．

3.3.4 局在振動

1 次元の完全結晶において原点の原子を質量 m_0 の原子で置き換える (ただし $m_0 < m$ とする) (図 1.23)．

まず $n \neq 0$ の原子に対する運動方程式は

$$m\ddot{u}_n = K(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}).$$

ここで原子 $n = 0$ に外から角振動数 ω の振動を与えたときの n 番目の原子の変位を

$$u_n = u_0 b^n e^{i\omega t}$$

とおくと b について 2 次方程式

$$b^2 - \left(2 - \frac{\omega^2}{K/m}\right)b + 1 = 0$$

を得る．これから $-1 < b < 0$ の根として

$$b = -\frac{2\omega}{\omega_L^2}\left\{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_L^2}\right\} + 1, \quad \omega_L = \sqrt{\frac{4K}{m}} \tag{1.26}$$

となって，これは相隣る原子が逆向きに変位し，$n = 0$ から遠ざかるにつれて振幅が小さくなる局在振動を与える．

$n < 0$ についても同様な解を得るので，これらの解を $n = 0$ でつなぐ．外力はなく，この振動が $n = 0$ の原子の質量 m_0 が小さいために起こるとしてその条件を求める．$n = 0$ の運動方程式は

$$m_0\ddot{u}_0 = K(u_1 - 2u_0 + u_{-1})$$

である．これと $u_1 = u_{-1} = u_0 b$ とから

$$-m_0\omega^2 = 2K(b-1) \tag{1.27}$$

を得る．ここで b は (1.26) で与えられ ω の関数である．

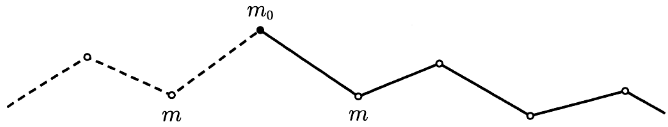


図 1.23　軽い原子 m_0 を含む格子．

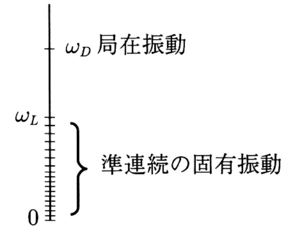


図 1.24　軽い不純物による局在振動．

(1.26) と (1.27) を連立させ $\omega = \omega_D$ について解き，整理すると

$$b = -\frac{Q}{2-Q}, \quad \omega_D = \frac{\omega_L}{\sqrt{Q(2-Q)}} \quad \left(Q = \frac{m_0}{m} < 1\right)$$

となる．これが局在振動 ω_D を与える式である（図 1.24）．

特に $\omega_0 \to \omega (Q \to 1)$ とすると

$$b = -1, \quad \omega_D = \omega_L$$

となり，ω_D は最大振動数 ω_L に一致し，局在振動でなくなる．

3.3.5　無秩序格子の振動スペクトル

いくつかの種類の原子が不規則に並んだ結晶格子を無秩序格子と言う．無秩序格子では規則系のようなはっきりした光学的振動帯などのスペクトル構造が消滅して，スペクトルはぼやけたものになるというのが 1960 年頃の予想であった．しかし 2 種類の原子からなる 1 次元不規則格子の振動スペクトルを Dean らが電子計算機で調べたところ，極めて細かい構造をもつスペクトルが得られた．これを図 1.25 に示す．これは 2 種類の原子の質量の比が 2 の場合の 2 乗振動数

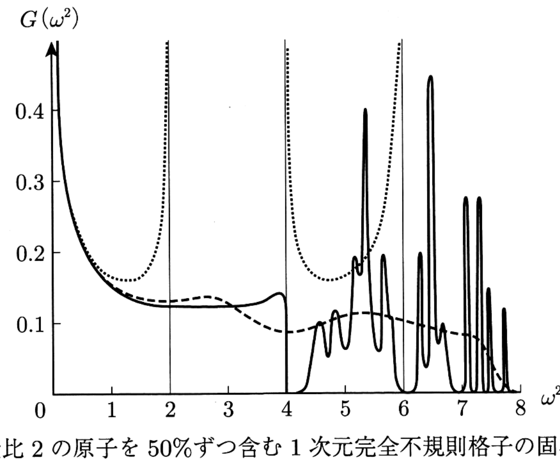


図 1.25　質量比 2 の原子を 50%ずつ含む 1 次元完全不規則格子の固有振動数の 2 乗のスペクトル．実線は完全不規則格子，破線はモーメント近似法による最良の近似，点線は完全格子．

密度（固有振数の2乗が $\omega^2 \sim \omega^2 + d(\omega^2)$ である固有振動数の数を $G(\omega^2)d(\omega^2)$ とする）を示している．

固有振動数密度 $G(\omega^2)$ が0になる振動数があることがこの図からわかる．これは松田博嗣によって理論的に示され，特殊振動数と名付けられた（1964）．堀淳一も別の方法で同じ結果を得ている（1964）．2次元，3次元の無秩序格子でも特殊振動数が存在することが計算機によって示されている．特殊振動数は軽い不純物原子の「島」による局在振動が原因で生じる．

近似的な理論では示されない特殊振動数の存在が厳密な理論では示されたところにこの結果の大きな価値がある．

さらに松田は，局在振動が振幅の局在を伴うことに着目し，そのような結晶格子ではエネルギーの伝達が局在振動のために阻害されるであろうと考えて，フーリエの定理に似た熱伝導が起こることを示している．

3.4 1次元双対系の定理

多くの人が不純物の入った1次元格子の固有振動を解析的に，あるいは電子計算機を用いて調べてみた．そして簡単な場合には相異なる2つの1次元格子の固有振動がすべて一致する場合があることや，この場合にある種の変換によって2つの体系の固有振動が関係づけられることを発見した．

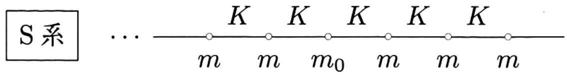
これらの簡単な場合の例を次にいくつか挙げてから一般的な証明を示すことにしよう．

2つの体系の固有振動が互いにすべて一致するとき，これらは双対系をなす，ということにする．不純物の入った1次元線形格子について，このような双対系が必ずあること，しかもいくつでもある．これはすでに証明されていたのかもしれないが，私は1964年の菅平における研究会を準備しているときにこれを発見した．

3.4.1 局在振動と双対系

(a) 1個の軽い不純物を含む格子．これについてはすでに3.3.4節において述べた．

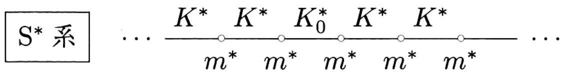
格子の原子の質量を m，不純物の質量を m_0 とする．模型的に描くとこの格子は



となる．$m_0 < m$ のときに局在振動は

$$\omega_D = \frac{\omega_L}{\sqrt{\frac{m_0}{m}\left(2 - \frac{m_0}{m}\right)}} \qquad \left(\omega_L = \sqrt{\frac{4K}{m}}\right).$$

(b) 1個のバネ定数が K_0^*，その他のバネ定数を K^* とし，原子の質量をすべて m^* とすると



この場合，$K_0^* > K^*$ ならば1個の局在振動 ω_D^* があり

$$\omega_D^* = \frac{\omega_L^*}{\sqrt{\frac{K^*}{K_0^*}\left(2 - \frac{K^*}{K_0^*}\right)}} \qquad \left(\omega_L^* = \sqrt{\frac{4K^*}{m^*}}\right)$$

で与えられる．したがって K^*，m^* を

$$\frac{K^*}{m^*} = \frac{K}{m}, \quad \frac{K^*}{K_0^*} = \frac{m_0}{m},$$

あるいは

$$mK^* = m^*K = m_0K_0^*$$

とすれば

$$\omega_L = \omega_L^*$$

であり，2つの系の局在振動数も等しい：

$$\omega_D = \omega_D^*.$$

上述の (a) をS系，(b) をS^*系と呼ぼう．これらは固有振動数を全部（準連続の部分と局在振動の固有振動）共有する．そこでこれらは双対（dual）であるとか，双対系をなすとか言うことにした．

上の例は，無限に長い1次元系の中央に不純物がある双対系である．これと反対に一番短い体系の双対性を考えてみよう．

3.4.2 最も簡単な双対系

(a) 図1.26のように左端を固定されたバネに質量 m をつけた体系で，バネ定数を K とする．質量の変位を x，運動量を $p = m\dot{x}$ と書くと，ハミルトニアン H は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{K}{2}x^2$$

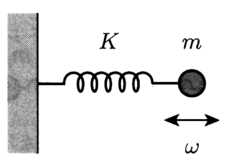


図1.26 バネと質量．

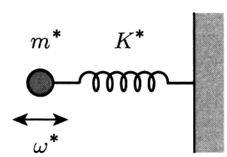


図1.27 質量とバネ．

であり，固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

である．

(b) ここで質量 m^*，バネ定数 K^* をもつ体系（図 1.27）を考え，そのハミルトニアン H^* を

$$H^* = \frac{P^2}{2m^*} + \frac{K^*}{2}Q^2$$

とすると固有振動数は

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}}$$

である．したがって

$$\frac{K}{m} = \frac{K^*}{m^*}$$

あるいは

$$Km^* = K^*m$$

であれば $\omega = \omega^*$ であり，(a) と (b) とは双対系である．

1 次元系 (a) と (b) とが双対系である条件を一般的に考えよう．

3.4.3 一般的な双対性

(a) 質量 $m_1, m_2, \cdots, m_N$ の N 個の粒子がバネによって結ばれた 1 次元体系を考え，$j-1$ 番目と j 番目の粒子の間のバネの力の定数を K_j とする (図 1.28)．簡単のため，左端 $(j=0)$ の粒子は固定されていて，右端 $(j=N)$ の粒子は自由であるとする．j 粒子の変位を x_j，運動量を p_j とすると運動量は

$$p_j = m_j \dot{x}_j$$

であり，ハミルトニアンは

$$\boxed{H = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j} p_j^2 + \sum_j \frac{K_j}{2}(x_j - x_{j-1})^2}$$

である．

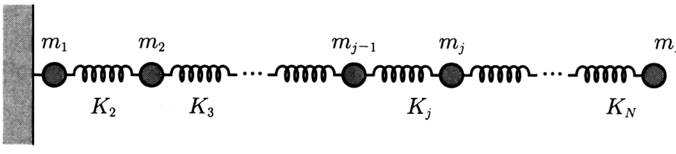


図 1.28 一般的な格子．

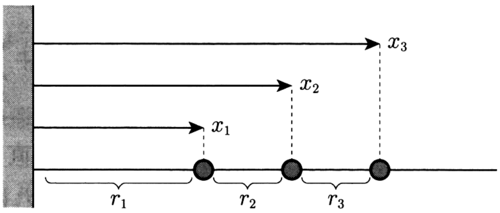


図 1.29　変位 x_j と相対変位 r_j.

ここで j 粒子と $j-1$ 粒子の相対変位

$$r_j = x_j - x_{j-1}$$

を一般座標として用いる（図 1.29）．r_j と x_j との関係は

$$r_1 = x_1, \quad r_2 = x_2 - x_1, \quad r_3 = x_3 - x_2, \quad \cdots, \quad r_N = x_N - x_{N-1}.$$

したがって

$$x_1 = r_1, \quad x_2 = r_1+r_2, \quad x_3 = r_1+r_2+r_3, \quad \cdots, \quad x_N = r_1+r_2+\cdots+r_N$$

および

$$\dot{x}_1 = \dot{r}_1, \quad \dot{x}_2 = \dot{r}_1+\dot{r}_2, \quad \dot{x}_3 = \dot{r}_1+\dot{r}_2+\dot{r}_3, \quad \cdots, \quad \dot{x}_N = \dot{r}_1+\dot{r}_2+\cdots+\dot{r}_N$$

となる．

力学の原理によれば，r_j に正準共役な運動量を s_j とすると

$$s_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_j}$$

である．ここで T は全運動エネルギー

$$\begin{aligned} T = &\frac{m_1}{2}\dot{r}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2)^2 + \cdots + \frac{m_j}{2}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \cdots + \dot{r}_j)^2 + \cdots \\ &\cdots + \frac{m_N}{2}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \cdots + \dot{r}_N)^2 \end{aligned}$$

を表す．したがって

$$s_j = m_j(\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \cdots + \dot{r}_j) + m_{j+1}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \cdots + \dot{r}_{j+1}) + \cdots,$$
$$s_{j+1} = m_{j+1}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \cdots + \dot{r}_{j+1}) + m_{j+2}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \cdots + \dot{r}_{j+2}) + \cdots$$

あるいは

$$s_j - s_{j+1} = m_j(\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \cdots + \dot{r}_j) = m_j \dot{x}_j$$
$$\therefore \qquad s_j - s_{j+1} = p_j$$

という関係があることに気付く．

これらの関係を用いるとハミルトニアンは

$$\boxed{H = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j}(s_j - s_{j+1})^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{K_j}{2} r_j^2}$$

と書けることがわかる．少し書き直しておこう．

ここで r_j は一般座標，s_j はこれに共役な正準運動量であるが，さらに a を任意の定数として

$$r_j = \frac{P_j}{a}, \quad s_j = -aQ_j$$

とおけば，Q_j と P_j は正準共役な座標と運動量の組になる．ハミルトニアンはこれらを用いて

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{K_j/a^2}{2} P_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{a^2}{2m_j}(Q_j - Q_{j+1})^2$$

と書き直される．

(b) したがって (a) に対してハミルトニアン

$$\boxed{H^* = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j^*} P_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{K_j^*}{2}(Q_j - Q_{j+1})^2}$$

で表される体系 (b) があるとき，m_j^* と K_j^* とが

$$\frac{1}{m_j^*} = \frac{K_j}{a^2}, \quad K_j^* = \frac{a^2}{m_j}$$

によって体系 (a) と関係づけられるならば，(a) と (b) は同等（双対系）である．

双対系はもとの体系の質量とバネの役割をとりかえた体系であり，双対系の間には次の関係がある．

(i) $$\boxed{K_1 m_1^* = K_1^* m_1 = K_2 m_2^* = \cdots = K_N^* m_N = a^2}$$

もしもバネ定数 K_1 を無限に弱くすれば（$K_1 \to 0$），上式により m_1^* は無限に大きくなる（$m_1^* \to \infty$）．これは (a) の右端の自由端は (b) の右端の固定端に対応する．

また $m_N \to \infty$ とすれば上式により $K_N^* \to 0$ となる．これは (a) の左端の固定端は (b) の左端の自由端に対応する．このようにして次のことがわかる．

(ii) 固定端は双対系の自由端に対応し，自由端は双対系の固定端に対応する．

3.5 非線形格子の双対ハミルトニアン

一様な 1 次元格子で，粒子間の相互作用が非線形である場合にも双対系を考えることができる．相互作用を $\phi(x_j - x_{j-1})$ とすると，ハミルトニアンは

$$H=\sum_j \frac{1}{2m}p_j^2+\sum_j \phi(x_j-x_{j-1}) \tag{1.28}$$

となる．ここで線形の場合と同じように

$$\dot{x}_1=\dot{r}_1, \quad \dot{x}_2=\dot{r}_1+\dot{r}_2, \quad \cdots, \quad \dot{x}_j=\dot{r}_1+\dot{r}_2+\cdots+\dot{r}_j, \quad \cdots$$

と書き直し，r_j に共役な運動量を $s_j=\partial T/\partial \dot{r}_j$ とすると

$$s_j-s_{j+1}=m\dot{x}_j=p_j$$

となるからハミルトニアンは

$$\boxed{H=\sum_j \frac{1}{2m}(s_j-s_{j+1})^2+\sum_j \phi(r_j)} \tag{1.29}$$

と書ける．

また s_j を t で積分したものを

$$S_j=\int^t s_j dt$$

とすれば

$$S_j-S_{j+1}=mx_j \tag{1.30}$$

となる．

ここで特に $\phi(r_j)=\frac{K}{2}r_j^2$ とおけば (1.29) は線形の場合のハミルトニアンとなる．したがって線形の場合を含めてハミルトニアンは (1.29) で与えられることがわかる．この式で r_j は一般座標，s_j はこれに共役な運動量である．

また，すでに見てきたように例えば $Q_j=-s_j$ を座標と考え，$p_j=r_j$ をこれに共役な運動量と考えることもできる．しかしどちらのとり方をしても正準共役の運動方程式としては同じ結果になる．

3.5.1 非線形の場合の運動方程式

菅平の研究会の報告として双対系の定理について書いていたときに，非線形の場合にも双対系の考え方が適用できることに気付き，これを報告の一節に加えることにした．これを次に述べておこう．

正準運動方程式はハミルトニアン (1.29) を使って

$$\dot{r}_j = \frac{\partial H}{\partial s_j}=\frac{1}{m}(2s_j-s_{j-1}-s_{j+1}), \tag{1.31}$$

$$\dot{s}_j = -\frac{\partial H}{\partial r_j}=-\phi'(r_j) \tag{1.32}$$

となる．

ここで (1.31) を微分した $\ddot{r}_j$ の式に $\dot{s}_j$ を代入すれば

$$m\ddot{r}_j = -2\phi'(r_j) + \phi'(r_{j-1}) + \phi'(r_{j+1}) \tag{1.33}$$

を得るが，線形の場合は $\phi(r) = \frac{K}{2}r^2$，$\phi'(r) = Kr$ なので，上式は

$$m\ddot{r}_j = K(r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1})$$

となる．これはよく知られた線形の波動方程式である．

また $\dot{s}_j$ の式 (1.32) からは

$$\ddot{s}_j = -\phi''(r_j)\dot{r}_j,$$

あるいは

$$\ddot{s}_j = -\frac{1}{m}\phi''(r_j)(2s_j - s_{j-1} - s_{j+1}) \tag{1.34}$$

を得るが，線形の場合は $\phi''(r) = K$ であるからこの式は再び線形の波動方程式

$$\ddot{s}_j = \frac{K}{m}(s_{j-1} - 2s_j + s_{j+1})$$

を与える．

非線形の場合は $\ddot{r}_j$ についての運動方程式 (1.33) も，$\ddot{s}_j$ についての方程式 (1.34) もこのままでは役に立ちそうに思えない．

しかし $\dot{s}_j = -\phi'(r_j)$ (1.32) が逆に r_j について解ける場合はこれを

$$\boxed{r_j = -\frac{1}{m}\chi(\dot{s}_j)} \tag{1.35}$$

とおくと (1.35) は

$$\boxed{\frac{d}{dt}\chi(\dot{s}_j) = s_{j-1} - 2s_j + s_{j+1}} \tag{1.36}$$

となる．ただしここで $\chi(\dot{s})$ は $\dot{s}$ について 1 価関数であるとする．上式は j について漸化式の形をしている（すなわち $s_{j-1}(t)$，$s_j(t)$ を与えれば $s_{j+1}(t)$ が決まる）ので理解しやすい方程式になっている．実際，後に示すように，この運動方程式が積分可能な非線形格子を発見する道を開いてくれたのであった（第 2 編参照）．

(1.36) は $s_j(t)$ について書かれた運動方程式で，$r_j(t)$ について書かれた運動方程式 (1.33) に対して双対な方程式である．

第２編

ソリトンの数理



第 4 章
非線形格子の理論

モデル化された非線形波動の理論的研究から，指数的相互作用をもつ格子モデルが発明された．

4.1 可積分な非線形格子の発見

1 次元格子のモデルとして，隣接粒子間だけの相互作用が働いている一様な体系を考える．粒子の質量はすべて等しく m であり，n 番目の粒子の変位を x_n とする（図 2.1 (a)）．n 番目の粒子と $n-1$ 番目の粒子の間の相互作用のポテンシャルを $\phi(x_n - x_{n-1})$ とすると力は $\phi'(x_n - x_{n-1})$ であるから，運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{x}_n = -\phi'(x_n - x_{n-1}) + \phi'(x_{n+1} - x_n)} \tag{2.1}$$

と書けるが，相対変位

$$r_n = x_n - x_{n-1} \tag{2.2}$$

を用いると

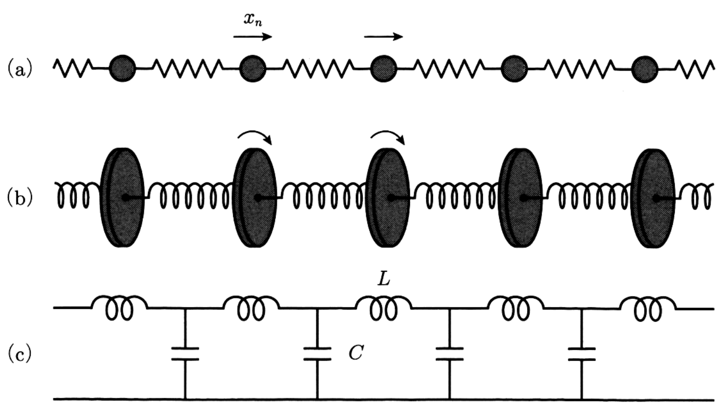


図 2.1　格子模型．

$$m\ddot{r}_n = \phi'(r_{n-1}) - 2\phi'(r_n) + \phi'(r_{n+1}) \tag{2.3}$$

となる．ここで

$$\boxed{-\phi'(r_n) = \dot{s}_n} \tag{2.4}$$

とおいて s_n を導入し，さらにこの式の逆関数を

$$\boxed{r_n = -\frac{1}{m}\chi(\dot{s}_n)} \tag{2.5}$$

とおくと (2.3) は

$$\frac{d^2}{dt^2}\chi(\dot{s}_n) = \dot{s}_{n-1} - 2\dot{s}_n + \dot{s}_{n+1}$$

となる．この方程式を時間について積分すると運動方程式として

$$\boxed{\frac{d}{dt}\chi(\dot{s}_n) = s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n} \tag{2.6}$$

が得られる．第 1 編 3.5.1 の (1.31) によれば s_n は r_n に正準共役な運動量であることがわかる．

例えば正弦波 $s_n = A\sin(\omega t - kn)$ を仮定すると (2.6) は線形の波動方程式 $\ddot{s}_n = s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n$ を与える．

問題は (2.3) が非線形の相互作用 $\phi'(r_n)$ を与えるような波動を記述できるかということである．その波動は正弦波以外の周期的な波とか，パルス的な波などであろう．Ford などの計算機実験を参考にした立場では周期的な波が期待された．

言いかえれば (2.6) を満足する正弦波以外の周期的な波を見出すことができるか．それが非線形相互作用をもつ波動方程式であるような場合が発見できるかどうかという問題になる．この漠然とした問題に対する一つの方法は，周期的な関数を仮定してみる試行錯誤であろう．

正弦波以外の非線形波の候補としてまず考えられるのはヤコビ (Jacobi) の楕円関数である．そこで三角関数の拡張と考えられるヤコビの楕円関数 sn，cn，dn を s_n として調べてみたが $s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n$ が $\dot{s}_n$ の関数にならなかったのでこれらは (2.6) を満たさないことがわかった．

4.1.1 周期解の発見

1966 年の夏，小さな物理学辞典の一部を書く仕事をもって海岸へ避暑に出かけたが，荷物の中にヤコビの楕円関数のテキストをもっていったのは正解であった．雨の日などに楕円関数の自習ができたからである．

そうしている中に，あるときふと思ったのは正弦波の 2 乗は正弦波の重ね合わせになるが，ヤコビの楕円関数の 2 乗は違った関数になるから，これも候補として調べなければならないということであった．その結果，楕円関数 sn の 2

乗が満足する式（付録「楕円関数」，特に「4.2　種々の加法定理」を参照）

$$\boxed{\mathrm{sn}^2(u+v)-\mathrm{sn}^2(u-v)=2\frac{d}{dv}\frac{\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u\ \mathrm{sn}^2v}{1-k^2\ \mathrm{sn}^2\ u\ \mathrm{sn}^2\ v}} \tag{2.7}$$

を得て，これが (2.6) に似ていることを直観した．今眺めてみると，特によく似ているとも思えないが，v は時間 t に相当するとすれば，少し似ているところがある．直観，あるいはひらめきが次のステップを用意してくれた．

それは

$$\varepsilon(u)=\int_0^u \mathrm{dn}^2\xi d\xi=\int_0^u(1-k^2\mathrm{sn}^2\xi)d\xi \tag{2.8}$$

とおくことであった．これから

$$\begin{aligned}&\varepsilon(u+v)=\int_0^{u+v}\mathrm{dn}^2\xi d\xi,\quad \varepsilon(u-v)=\int_0^{u-v}\mathrm{dn}^2\xi d\xi,\\&\varepsilon'(u)=\mathrm{dn}^2u,\quad \varepsilon''(u)=-2k^2\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u.\end{aligned} \tag{2.9}$$

したがって (2,7), (2.9) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}[\varepsilon(u+v)+\varepsilon(u-v)-2\varepsilon(u)]&=-k^2[\mathrm{sn}^2(u+v)-\mathrm{sn}^2(u-v)]\\&=\frac{d}{dv}\left(\frac{\varepsilon''(u)}{\frac{1}{\mathrm{sn}^2v}-1+\varepsilon'(u)}\right)\end{aligned} \tag{2.10}$$

を得る．両辺を v について積分すると

$$\varepsilon(u+v)+\varepsilon(u-v)-2\varepsilon(u)=\frac{\varepsilon''(u)}{\frac{1}{\mathrm{sn}^2v}-1+\varepsilon'(u)}. \tag{2.11}$$

さらにツェータ関数（Zeta 関数，zn u とも書く）

$$Z(u)=\varepsilon(u)-\frac{E}{K}u,\quad Z'(u)=\varepsilon'(u)-\frac{E}{K},\quad Z''(u)=\varepsilon''(u) \tag{2.12}$$

を導入すると (2.11) は書き直されて

$$Z(u+v)+Z(u-v)-2Z(u)=\frac{d}{du}\log\left(1+\frac{Z'(u)}{\frac{1}{\mathrm{sn}^2v}-1+\frac{E}{K}}\right) \tag{2.13}$$

となる．この式は (2.6) と極めてよく似ていることがわかるだろう．$Z(u)$, $Z'(u)$ は共に周期 $2K$ の周期関数である．

そこで

$$\boxed{s_n=\frac{2K\nu}{b/m}Z(u)},\quad u=2\left(\nu t\pm\frac{n}{\lambda}\right)K,\quad \nu=\frac{2K}{\lambda} \tag{2.14}$$

とおくと，ν は振動数，λ は粒子番号で測った波長を表すことになる．

波動の式 (2.6) と比べて

$$\chi(\dot{s})=\frac{m}{b}\log\left(1+\frac{(b/m)/(2K\nu)^2}{\frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2K}{\lambda}\right)}-1+\frac{E}{K}}\dot{s}\right)-m\sigma \tag{2.15}$$

を得るが，$\chi(\dot{s}) = -mr$ は $\dot{s} = -\phi'(r)$ の逆関数を与えるものであるから，

$$\frac{(b/m)/(2K\nu)^2}{\frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2K}{\lambda}\right)} - 1 + \frac{E}{K}} = \frac{1}{a} \tag{2.16}$$

は ν や λ に依存しない定数でなければならない．したがって (2.15) は

$$\chi(\dot{s}) = \frac{m}{b}\log\left(1 + \frac{\dot{s}}{a}\right) - m\sigma = -mr \tag{2.17}$$

となる．書き直すと

$$r = -\frac{1}{b}\log\left(1 + \frac{\dot{s}}{a}\right) + \sigma. \tag{2.18}$$

ここで $\dot{s}$ は (2.4) によって格子の粒子間相互作用のポテンシャル $\phi(r)$ と

$$\dot{s} = a(e^{-b(r-\sigma)} - 1) = -\phi'(r) \tag{2.19}$$

で結ばれるから

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-b(r-\sigma)} + ar. \tag{2.20}$$

ふつうは簡略して $\sigma = 0$ とおき

$$\boxed{\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar} \tag{2.21}$$

と書く（図 2.2）．この相互作用をもつ格子を指数格子（戸田格子）と言う．その運動方程式は (2.1), (2.21) により

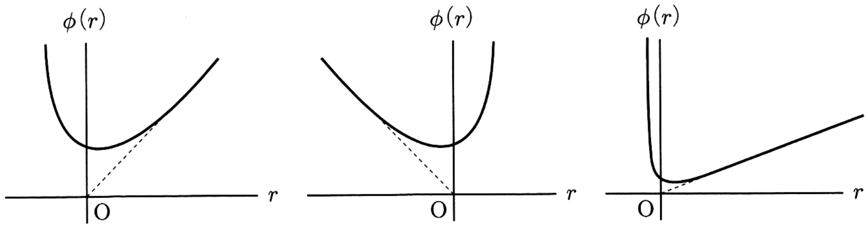
$$m\ddot{x}_n = a[e^{-b(x_n - x_{n-1})} - e^{-b(x_{n+1} - x_n)}] \tag{2.22}$$

と書ける．また (2.8), (2.12), (2.19) により

$$\dot{s} = a(e^{-br} - 1), \quad Z'(u) = \mathrm{dn}^2 u - \frac{E}{K} \tag{2.23}$$

なので，周期波は

$$\boxed{e^{-br_n} - 1 = \frac{(2K\nu)^2}{ab/m}\left[\mathrm{dn}^2\left\{2K\left(\nu t \pm \frac{n}{\lambda}\right)\right\} - \frac{E}{K}\right]} \tag{2.24}$$



(a)　$a, b > 0$ の場合　(b)　$a, b < 0$ の場合　(c)　b が大きい場合

図 2.2　指数型ポテンシャル．

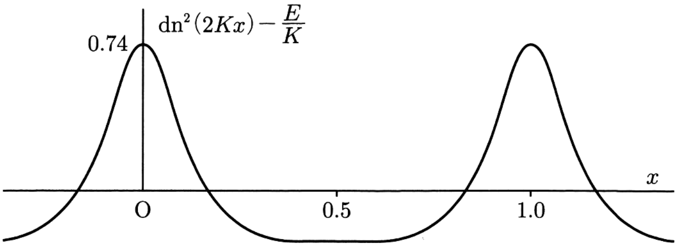


図 2.3　$f(x) = \mathrm{dn}^2(2Kx) - E/K$ 周期波の形.

で与えられ（図 2.3），その分散関係は (2.16) により

$$\boxed{2K\nu = \sqrt{\frac{ab}{m}}\Bigg/\sqrt{\frac{1}{\mathrm{sn}^2(2K/\lambda)} - 1 + \frac{E}{K}}} \tag{2.25}$$

で与えられる．

こうして周期解をもつ非線形格子が得られ，1966 年の 9 月にはその計算を物理学会のジャーナルに投稿した．ほとんど全く新しい分野の仕事であったので，論文最後に引用した参照論文は上に述べた Ford の論文と双対変換の論文と H.B.S. Jeffery のテキスト『Mathematical Physics』(Cambridge Univ. Press, 1956) および E.T. Whittaker, Watson のテキスト『Modern Analysis』(Cambridge Univ. Press, 1927) だけであった．周期解の図示もなかったが，次の論文（1967 年 5 月投稿）では周期解やパルス解などの例が示してある（図 2.3）．

4.1.2　周期波とソリトン

すでに見たように，指数格子の周期波は楕円関数 dn を用いて

$$e^{-br_n} - 1 = \frac{(2K\nu)^2}{ab/m}\left[\mathrm{dn}^2\left\{2K\left(\nu t - \frac{n}{\lambda}\right)\right\} - \frac{E}{K}\right]$$

と書ける．ここで ν は振動数，λ は波長であり，分散式

$$2K\nu = \sqrt{\frac{ab}{m}}\left\{\frac{1}{\mathrm{sn}^2\frac{2K}{\lambda}} - 1 + \frac{E}{K}\right\}^{-1/2}$$

で関係づけられている．

楕円関数 dn と完全楕円積分 K および E は同じ母数 k を共有する．

母数 k が小さい（$k \simeq 0$）と周期波は正弦波に近いが，母数 k が大きいと周期波はとがった山が等間隔に並んだ形になる．

ここで原点の付近に着目しながら

$$k \to 1,\quad \lambda \to \infty \quad ただし \quad \kappa = \frac{2K}{\lambda} = 一定$$

の極限をとると

$$\frac{E}{K} \to 0,\quad \mathrm{sn}\kappa \to \tanh\kappa,\quad \mathrm{cn}\kappa \to \mathrm{sech}\,\kappa$$

なので

$$2K\nu \to \sqrt{\frac{ab}{m}}\frac{\mathrm{sn}\kappa}{\mathrm{cn}\kappa} \to \sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\kappa \equiv \beta$$

であり，さらに

$$\mathrm{dn}^2\left\{2K\left(\frac{n}{\lambda}-\nu t\right)\right\} \to \mathrm{sech}^2\left(\kappa n-\beta t\right).$$

したがって (2.24) は

$$e^{-br_n}-1=\beta^2\mathrm{sech}^2\left(\kappa n-\beta t\right)$$

となる．これはソリトンの式である．

実は dn^2 に対して下の公式がある：

［公式］ $$\mathrm{dn}^2(2Kv)-\frac{E}{K}=\left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2\left\{\frac{\pi K}{K'}(v-l)\right\}-\frac{\pi}{2KK'}.$$

これは dn^2u-E/K が等間隔 ($l=-\infty,\cdots,\infty$) に並ぶ山の列 $\mathrm{sech}^2\,\kappa(v-l)$ からできていることを表す式である．

4.2 格子ソリトンの衝突

1968 年には京都大学で統計力学の国際会議が催されることになっていた．私の非線形格子の研究は力学ではあるが統計力学の中に入れるのはおこがましいという気持ちがないではなかったが，FPU の仕事も非線形格子がエルゴード性をもつか否かという問いに発しているという点では統計力学の基礎的問題と言えるわけである．非線形格子のあるものが積分可能であるということになれば，それは非エルゴード的であるに違いないだろう．したがって非線形格子の力学は統計力学の国際会議の重要なテーマと言ってもいいわけである．エルゴード性が統計力学の基礎として必要であるという主張に賛成するわけではない．しかし積分可能な力学系の存在を示すことだけでも，極めて重要な課題であると思う．

さて，結果から言うと，この国際会議で私が話したのは 2 つの孤立波の衝突を記述する非線形格子の解（2 個のソリトン）の発表と，これを踏まえて非線形系の再帰現象（非線形格子における FPU の再帰現象と KdV 系における Zabusky–Kruskal の再帰現象）を解釈する試論とであった．まず 2 個のソリトンの運動を表す解の話から始めよう．

非線形格子の運動方程式を相対変位 $r_n=x_n-x_{n-1}$ について書くと

$$m\frac{d^2r_n}{dt^2}=a(2e^{-br_n}-e^{-br_{n-1}}-e^{-br_{n+1}}) \tag{2.26}$$

となる．ここで

$$a(e^{-br_n}-1)=\frac{d^2}{dt^2}S_n$$

とおくと S_n に対する運動方程式は

$$\log\left(1+\frac{1}{a}\frac{d^2}{dt^2}S_n\right)=\frac{b}{m}(S_{n-1}-2S_n+S_{n+1}) \tag{2.27}$$

と書ける．この方程式に対する周期波解（cnoidal 波）はすでに述べた通りである．

1 個の孤立波を表す解を

$$e^{-br_n}-1=\frac{m}{ab}\beta^2\mathrm{sech}^2(\kappa n\pm\beta t) \tag{2.28}$$

と仮定すれば（図 2.4），これを運動方程式 (2.26) に代入して

$$\beta=\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\kappa$$

が決まる．この孤立波の速度は

$$c=\frac{\beta}{\kappa}=\sqrt{\frac{ab}{m}}\frac{\sinh\kappa}{\kappa}$$

で与えられる．κ が大きいほど波高は大きく速度は大きいが，波の幅は狭い．

2 個の孤立波が存在したとすると，これらは衝突したり，追い越したりするだろうが，そのとき孤立波は形が変わったり壊れたりするであろうか，というのが次の問題である．計算機によれば衝突してもソリトンは壊れないことが数値的に確かめられている．

ここで KdV の場合を思い出してみると波形はある式の 2 階微分で与えられていた．非線形格子の場合にもそうなのではないだろうか．

実際 1 個の孤立波の解 (2.28) は

$$\boxed{e^{-br_n}-1=\frac{m}{ab}\frac{d^2}{dt^2}S_n,\quad S_n=\log\cosh(\kappa n+\beta t)} \tag{2.29}$$

とおいて，運動方程式 (2.27) に代入すれば β は

$$\beta=\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\kappa$$

と決まる．KdV の場合は (2.29) が x についての 2 階微分であるのに対して格

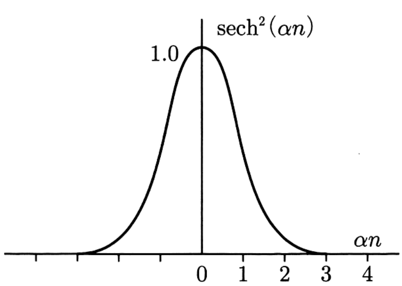


図 2.4 $\mathrm{sech}^2(\alpha n)$ ソリトンの形.

子の場合は t についての 2 階微分になっているが，これは KdV 方程式と格子の方程式との対応関係によるものであろう（この違いについては今は考えないことにする）．

以上は 1 個の孤立波解についてのことであったが，ここで KdV の「2 個のソリトンを含む解が (1.15) のように $(d^2/dx^2)\log(\cosh\cdots+\cosh\cdots)$ の形で与えられたことを踏まえ，格子の「2 個のソリトンを含む解」も

$$\boxed{e^{-br_n}-1=\frac{m}{ab}\frac{d^2}{dt^2}S_n}$$

とおいて S_n は (1.15) と似た形，すなわち

$$\boxed{S_n=\log[A\cosh(\kappa n-\beta t)+B\cosh(\mu n-\gamma t)]}$$

で与えられるであろうという推論に導かれた（ここで κ と μ とは相互作用をする 2 個のソリトンに固有のパラメータで，したがって任意であり，β と γ および A と B はこの S_n が格子の運動方程式を満足するように決められるもので，これらは κ と μ との関数であるはずである）．

運動方程式はすでに述べたように

$$m\frac{d^2}{dt^2}r_n=a(2e^{-br_n}-e^{-br_{n-1}}-e^{-br_{n+1}})$$

であるが，これを S_n について書くと

$$\log\left(1+\frac{d^2}{dt^2}S_n\right)=\frac{ab}{m}(S_{n-1}+S_{n+1}-2S_n)$$

である．

上の S_n をこの式の両辺に代入して少し長い計算を実行し，解を求めた．その結果，2 つの場合を見出した．その一つは

(i) $\beta=2\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\frac{\mu}{2}\cosh\frac{\kappa}{2},\quad \gamma=2\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\frac{\kappa}{2}\cosh\frac{\mu}{2},$
$B/A=\cosh(\kappa/2)/\cosh(\mu/2)$

であり，吟味してみるとこれは 2 つのソリトンが逆方向に進行する解（**向心衝突**）である（図 2.5 (a)）．もう一つは

(ii) $\beta=2\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\frac{\kappa}{2}\cosh\frac{\mu}{2},\quad \gamma=2\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\frac{\mu}{2}\cosh\frac{\kappa}{2},$
$B/A=\sinh(\kappa/2)/\sinh(\mu/2)$

であり，これは 2 つのソリトンが同じ方向へ進行する解（**追い越し衝突**）である（図 2.5 (b)）．

2 個のソリトンが衝突すると，線形の重ね合わせと違った波形になり（非線形の相互作用をした後），もとの波形を取り戻して 2 つのソリトンになって別れていく．その様子を吟味し，数値的に調べてみたのが図 2.6 である．衝突の際の

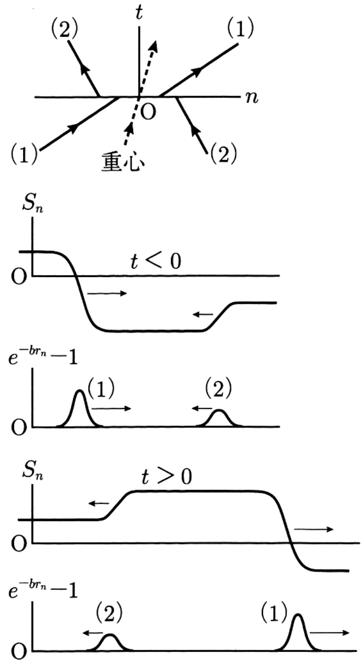


図 2.5 (a)　2 個のソリトンの衝突（向心衝突）．

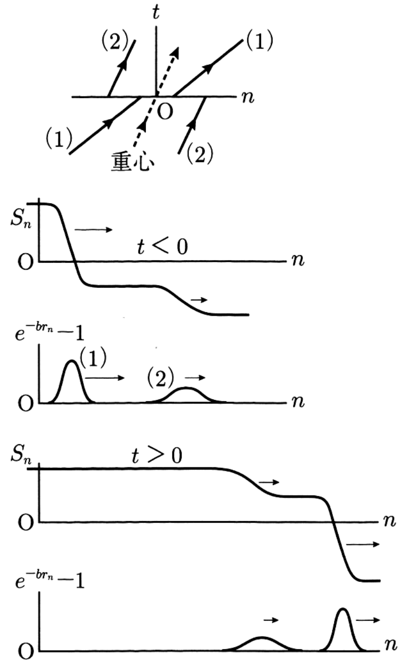


図 2.5 (b)　2 個のソリトンの衝突（追い越し衝突）．

相互作用によって衝突前と衝突後とではソリトンの進行にずれが生じる．そのずれは，ソリトンが衝突中は速度を上げて相手の中を通過すると考えれば納得がいく．粒子は密着するほど強く反発し固くなるので速度が上がると解釈される．

［注意］　1 個のソリトンは例えば

$$
\begin{aligned}
S_n &= \log\cosh(\kappa n+\beta t) = \log\frac{1}{2}\left\{e^{\kappa n+\beta t}+e^{-(\kappa n+\beta t)}\right\} \\
&= \log\left[\frac{1}{2}e^{\kappa n+\beta t}\left\{1+e^{-2(\kappa n+\beta t)}\right\}\right] \\
&= \log\frac{1}{2}+(\kappa n+\beta t)+\log\left\{1+e^{-2(\kappa n+\beta t)}\right\}
\end{aligned}
$$

と書き直せるが，波形はこの式の log を t で 2 回微分したもので与えられるから上式最後の式の右辺第 1 項と第 2 項（あるいは上式の中の $\frac{1}{2}e^{\kappa n+\beta t}$）は何の役もしていない．したがってこの因子を無視して

$$S_n = \log\{1+e^{-2(\kappa n+\beta t)}\}$$

としても同じソリトンが与えられる．同様にして 2 個のソリトンは

$$\boxed{S_n = \log\{1+A_1e^{-2(\kappa n-\beta t)}+A_2e^{-2(\mu n-\gamma t)}+A_3e^{-2(\kappa+\mu)n+2(\beta+\gamma)t}\}}$$

と仮定しても，結果としては同等な解が得られるのである．なおこの場合，2 ソリトン解は

$$\beta^2=\frac{ab}{m}\sinh^2\kappa,\quad \gamma^2=\frac{ab}{m}\sinh^2\mu,\quad \frac{A_3}{A_1A_2}=\frac{\sinh^2(\kappa-\mu)-\frac{m}{ab}(\beta-\gamma)^2}{\frac{m}{ab}(\beta+\gamma)^2-\sinh^2(\kappa+\mu)}$$

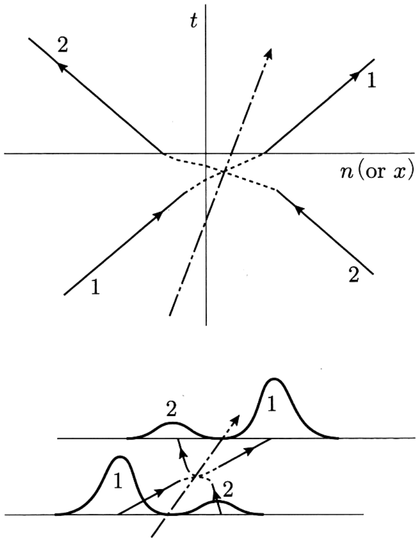


図 2.6 (a)　向心衝突.

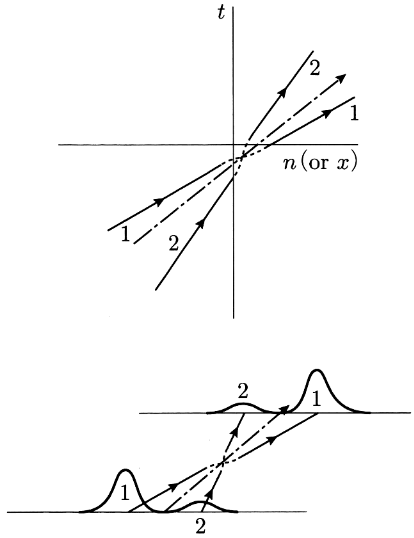


図 2.6 (b)　追い越し衝突.

によって与えられる．$\beta\gamma > 0$ の場合は追い越し衝突であり，$\beta\gamma < 0$ の場合は向心衝突であることが示される．これらの場合を分けて書くと上式の A_3/A_1A_2 は下のように書き直せる．

(i)　追い越し衝突（$\beta\gamma > 0$ の場合）例えば

$$\beta = \sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\kappa, \quad \gamma = \sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\mu, \quad \frac{A_3}{A_1A_2} = \left(\frac{\sinh\frac{\kappa-\mu}{2}}{\sinh\frac{\kappa+\mu}{2}}\right)^2.$$

(ii)　向心衝突（$\beta\gamma < 0$ の場合）例えば

$$\beta = \sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\kappa, \quad \gamma = -\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\mu, \quad \frac{A_3}{A_1A_2} = \left(\frac{\cosh\frac{\kappa-\mu}{2}}{\cosh\frac{\kappa+\mu}{2}}\right)^2.$$

さらに 3 個以上のソリトンを含む解も同様の形で与えられるが省略する．

このように S_n の形を仮定して，運動方程式に代入し，2 個のソリトンが衝突してもとの波形に戻るプロセスが明らかにされたのであった．この計算は双曲線関数 cosh や sinh あるいは指数関数 $e^{\kappa n \pm \beta t}$ の加法定理の繰り返しなので，初等的だがなかなか面倒な計算である．非線形問題の計算では 2 階，3 階の微分操作が絡んでくるので必然的に面倒なことが多い．しかし，ここで述べたような計算では，ほとんど迷うことがなかった．やるべき計算を済ますと，ただちに次に進むべき道が自然に予想されてくる．そしてその予想通りに道が開けてくる．格子ソリトンを発見した頃の数年間は確かにいい環境が周囲にあったと思われる．

1968 年に京都大学で催された統計力学の国際会議では格子ソリトンの研究が多くの出席者に認められた．出席者の一人だったアメリカのモントロール（Montroll）は「積分できる非線形格子を発見したと思ったことがあったが，残念ながら間違えだった」と言っていた．Zabusky を初めとして多くの人が非線形格子の発見を喜んでくれた．アメリカの研究者との共同研究などのため外国へ行くことも多くなった．

4.3 再帰現象

先に 1.3 節で述べたように，Fermi ら（FPU）は非線形格子の再帰現象を発見したが，これを連続体近似で吟味しようとした Zabusky はこの近似が KdV 方程式を与えることを発見し，この方程式を Kruskal と数値的に調べて KdV 系も再帰現象を示すことを確かめると同時にソリトンを発見（1.4 節参照）したのであった (1965).

KdV 系の運動は有限個のソリトンの集まりで近似できる．これらのソリトンが有限長の周期場を異なる速さで回るとすると，各ソリトンが 1 周する時間の最小公倍数ごとに初期状態に戻る．再帰現象はこのようにしてソリトンの運動をもとに理解できるわけである．

Zabusky と Kruskal が再帰現象を発見した KdV 場は

$$u_\tau + uu_\xi + \delta^2 u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 2)$$

であり，$0 \leq \xi \leq 2$ の周期場である．これを粒子数が $2N$ の格子の運動と対比させよう．そのため格子の粒子を $0 \leq n \leq 2N$ で番号づけし，n を連続な数として扱う．対比は

$$x = nh \quad (h = 1/N)$$

である．Zabusky らは初期状態として周期的な条件をおいたので，これを

$$u_{t=0} = a_u \cos \xi \quad (a_u \text{ は定数})$$

とおき，これに対応する格子の初期条件を

$$y_{x,t=0} = a_y \sin \pi x \quad (a_y \text{ は定数})$$

とする（ここで y_x は x（連続とみる）に関する微分を表す）．対応関係は

$$\xi = x - c_0 t \quad \left(c_0 = \sqrt{\frac{ab}{m}}\, h\right), \qquad \tau = \frac{\pi}{2}\varepsilon c_0 \frac{a_y}{a_u} t \quad (\varepsilon = 2\alpha h = bh),$$

$$u = \frac{1}{\pi}\frac{a_u}{a_y}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{12\pi\varepsilon}\frac{a_u}{a_y}$$

である．ここで b は非線形相互作用の定数であり，y は

$$y = e^{-br_n} - 1 \simeq br_n$$

によって格子粒子の変位 r_n に対応する．

KdV 系に付随する固有値方程式はこのとき

$$6\delta^2 \psi^{(l)}_{\xi\xi} - (U - \lambda_l)\psi^{(l)} = 0 \quad (U = -u)$$

となる．ここで $\psi^{(l)}$ は l 番目の固有値 λ_l に対する固有関数である．量子力学のシュレーディンガー方程式に対応させて考えれば，プランクの定数は

$$\hbar = 12\delta^2$$

に当たる．固有値 λ_l は時間によらず，初期条件から求めることができる (図 2.7).

初期条件は周期的であったが，これを図 2.7 のように放物線ポテンシャルで

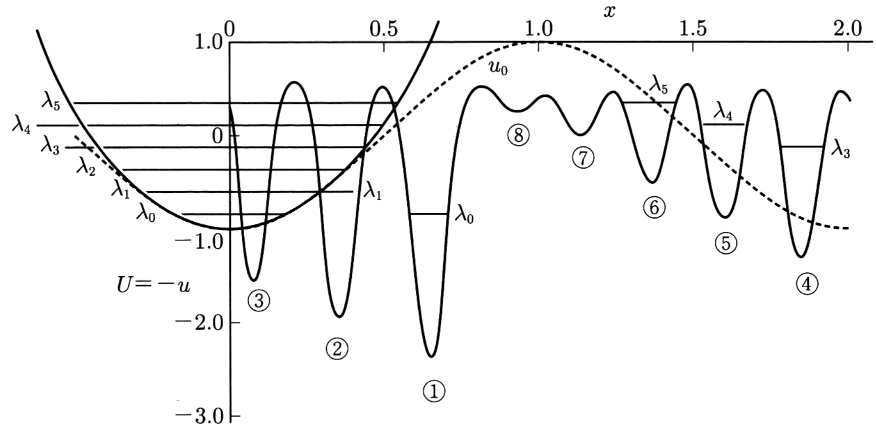


図 2.7　初期条件 $u_0=\cos\pi x$ と固有値（$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_5$）ソリトン①, ②, ⋯, ⑧の分離．

近似すると

$$U_{t=0}\simeq -u_{t=0}=-a_u+\frac{a_u\pi^2}{2}\xi^2$$

となるので，これに対する固有値は

$$\lambda_l=-a_u+\left(l+\frac{1}{2}\right)\sqrt{12\delta^2}\sqrt{a_u\pi^2}$$

で与えられる．$l=1,2,\cdots$ によって与えられるソリトンの高さ $2\lambda_l$ は等差級数をなすが，初期状態が周期的な特殊な条件だったので背景場のようなものがあって絶対値は決められない．そのため各ソリトンの速さ c_l も確定できないが，これも等差級数をなし，その公差を Δc とすると上の λ_l の係数から

$$\Delta c=4\pi\delta\sqrt{\frac{a_u}{3}}$$

で与えられる．

速さの差が Δc の 2 個のソリトンが周期 L の円形のトラックを走ったとするとし，τ_R 時間後に再会したとする．ソリトンの速さが c と $c+\Delta c$ であるとすると再帰時間 τ_R は

$$\tau_R=\frac{\nu L}{c}=\frac{(\nu+1)L}{c+\Delta c}.$$

したがって $\nu\Delta c=c$ であり

$$\tau_R\simeq\frac{L}{\Delta c}.$$

再帰時間はこの程度になるであろう．$L=2$ とおくと

$$\tau_R\simeq\frac{1}{2\pi\delta}\sqrt{\frac{3}{a_u}}$$

となる．

Zabusky–Kruskal は $\delta=0.022$, $a_u=1$ とした数値実験で再帰時間 $\tau_R=30.4/\pi$ を得た．これに対し，上の理論式は $\tau_R=40/\pi$ を与える．大雑

把ながらこれらの数値はほぼ一致していると言ってよいのではなかろうか．数値実験のほうが小さい再帰時間を与えているのは，ソリトンが衝突するときは互いに加速するためかもしれないが上の計算にはいろいろな近似が入っているので詳しいことは言えない．

Fermi ら（FPU）の非線形格子についての数値計算にも上の議論を使うことができ，再帰時間を t_R とすると（t_L は線形化した波が 1 周する時間）

$$t_R \simeq 0.6\frac{N^{3/2}}{\alpha^{1/2}}t_L \quad (t_L = L/c_0)$$

が得られる．Zabusky が繰り返した数値計算から求めた係数は 0.6 の代りに 0.44 であったということである．いずれにしても再帰現象はソリトンの運動を考えることによって理解できることが明らかになった．

4.4 指数型ポテンシャル

指数型相互作用のポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-b(r-r_0)} + ar + 定数 \qquad (ab > 0)$$

と書ける（ここで a と b の積はプラスとする）．

$\phi(r)$ の極小を $r = 0$ にとれば $r_0 = 0$ となる．簡単化して

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar$$

としよう．$a, b > 0$ のとき，$\phi(r)$ は図 2.2 (a) のような形になり，右方で引力を表し，極小の近くで伸び縮みに比例するフックの法則の力を表し，左方では指数的な強い反発力を示す．これは r のあまり大きくない所では一般の分子間力に似た相互作用である．$b \to 0$ とすると放物線的な領域（ハーモニック）が広くなる．また b を大きくした極限では剛体球に似た性質になる（図 2.2 (c)）．

a と b を共にマイナスにすると，強い引力と弱い反発力をもったポテンシャルになる（図 2.2 (b)）．r が小さいときは

$$\phi(r) = \frac{ab}{2}r^2 - \frac{ab^2}{6}r^3 + \cdots$$

となる．したがって微小な運動に対してはバネ定数が

$$\kappa = ab$$

の線形のバネのように働く．

また圧力 p が外から加わっているときは，ポテンシャル pr があると考えればよく，見かけのポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + (a+p)r$$

を相互作用とすることができる．

4.4.1 格子振動の模型

バネでつながれた粒子の振動を想像するには，図 2.1 (a) のような力学的模型を考えるのがふつうであろう．これはバネが縦方向に伸び縮みして，粒子が縦方向に振動する縦波の模型であり，あまり大きくない振幅の縦波を想像する場合に都合がいい模型（縦波模型）である．

しかし，バネを縮ませる力が右から働いたとき粒子間の距離はマイナスになって，右にあった粒子が左の粒子の中にめり込んでしまう（エネルギーは有限なので，そこまで考えなくてもよいのだが）．

この不具合を除くには，バネをねじれバネにするのがいい．この場合，力学的模型は図 2.1 (b) のように表せる．粒子の代わりに円板を，伸び縮みするバネの代わりにねじれバネを使うねじれ波の模型である．こうすれば粒子間の距離がマイナスになる代わりに円板相互の回転角がマイナスになるが，それは許容できるように思われる．

実際，指数格子を考え始めたとき，多くの人から縦振動模型を用いる不具合についてただされたことがあったし，自分でも粒子間の距離がマイナスになったときの状態を具合が悪いと感じることが多かった．しかし，バネの力が線形であっても隣の粒子にめり込むことは当然考えられるはずである．それを奇妙に思わないのは線形の波はどうせ近似であるとし，大きな振動は初めから除去しているからであろう．それに対し非線形の波の扱いでは大きな振動も考慮することにしているのでこのような問題が生じたのである．

なお，力学的な波動模型を備えた学校もある．A.C. Scott は円板でなく，単振り子をバネでつないだ模型を“非線形サインゴルドン方程式”のために考案していた．

図 2.1 (c) はソリトンの減衰機構などを調べるのに便利な非線形 LC 電気回路である．

4.4.2 非線形のはしご型回路

キャパシタンス C とインダクタンス L をつないだ図 2.1 (c) のようなはしご型の回路では回路方程式

$$\frac{dQ_n}{dt} = I_{n-1} - I_n, \quad \frac{d\Phi_n}{dt} = V_n - V_{n-1}$$

が成り立つ．ここで Q_n はキャパシタンスの電荷，I_n は電流，Φ_n はインダクタンスのフラックス，V_n は電圧である．

[線形の格子] キャパシタンス C，インダクタンス L が共に定数であると

$$Q_n = CV_n, \quad \Phi_n = LI_n.$$

したがって

$$C\frac{dV_n}{dt} = I_{n-1} - I_n, \quad L\frac{dI_n}{dt} = V_n - V_{n-1}$$

となる．これから

$$CL\frac{d^2V_n}{dt^2} = V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}, \quad CL\frac{d^2I_n}{dt^2} = I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1}$$

を得る．これは V_n，I_n について線形格子の波動方程式である．

[非線形の格子]　キャパシタンスが電圧に依存し，インダクタンスが定数である場合，v_0 を定数として

$$Q_n = Cv_0 \log(1 + V_n/v_0), \quad \Phi_n = LI_n$$

あるいは

$$V_n = v_0(e^{Q_n/Cv_0} - 1)$$

となるようなキャパシタンスを用いると

$$Cv_0\frac{d}{dt}\log(1 + V_n/v_0) = I_{n-1} - I_n, \quad L\frac{dI_n}{dt} = V_n - V_{n-1}$$

となり，これから

$$LCv_0\frac{d^2}{dt^2}\log(1 + V_n/v_0) = V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}$$

を得る．これは指数格子の運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\left(1 + \frac{f_n}{a}\right) = \frac{b}{m}(f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1})$$

と同形である．

このような LC 電気回路を用いて非線形格子を伝わる波を調べる研究が広くなされている．

なお，力学的な模型と回路模型との対応関係は次のとおりである．

力学模型		回路模型
バネの力 f_n	$\longleftrightarrow$	電圧 V_n
質量 m	$\longleftrightarrow$	インダクタンス L
バネ定数 a	$\longleftrightarrow$	特性電圧 v_0
速度 v	$\longleftrightarrow$	電流 I_n

4.4.3　最隣接相互作用

線維や生体を構成する高分子のほとんどは 1 次元上に分子が並んだような物質，すなわち 1 次元物質である．最も簡単な 1 次元物質は 1 直線上に並んだ分子がその直線上で運動する体系であろう．分子とすぐ隣の分子とフックの法則に従うバネで連結されていればこれは 1 次元の固体の模型である．1940 年の論文で永宮健夫さんはこのような体系の統計力学を扱っている．

その頃の統計力学の重要な問題の一つは，1次元物質に凝縮・蒸発という相変化が起こり得るかということであった．この問題に対して高橋秀俊さんは，隣の分子とだけが相互作用をする1次元の体系では相変化が起こらないことを次のように証明した．

統計力学によれば，相隣る分子間の相互作用のポテンシャルを $\phi(r)$ とするとし，分子（粒子）の総数を N とすると体系の長さ L は

$$L = N\frac{\int_0^\infty re^{-[\phi(r)+pr]/kT}dr}{\int_0^\infty e^{-[\phi(r)+pr]/kT}dr}$$

で与えられる．ここで T は絶対温度，k はボルツマン定数，p は圧力であり，分子間の反発力は $r<0$ で無限大になるとしている．

この式によれば，分子間の長さ l は圧力 p の1価関数であり，相変化の場合の等温線（図 2.8 参照）を与えることはできない．したがってどのような分子間相互作用 $\phi(r)$ でも1次元物質は相変化（気体 ↔ 液体）を起こすことはない．

なお1次元物質でも分子間引力が遠くにある分子まで及ぶときは相変化を起こし得ることが，M. Kac–E. Uhlenbeck–P.C. Hemmer によって示されている（1963）．

指数格子の粒子間のポテンシャルには

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar + 定数$$

である．粒子 n に働く粒子 $n-1$ からの力は

$$f(x_n - x_{n-1}) = -\frac{\partial}{\partial x_n}\phi(x_n - x_{n-1}) = ae^{-b(x_n - x_{n-1})} - a$$

であり，粒子 n に働く粒子 $n+1$ からの力は

$$f(x_{n+1} - x_n) = -\frac{\partial}{\partial x_n}\phi(x_{n+1} - x_n) = -ae^{-b(x_{n+1} - x_n)} + a$$

である．これから粒子 n に対する運動方程式は

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = f(x_n - x_{n-1}) + f(x_{n+1} - x_n),$$

すなわち

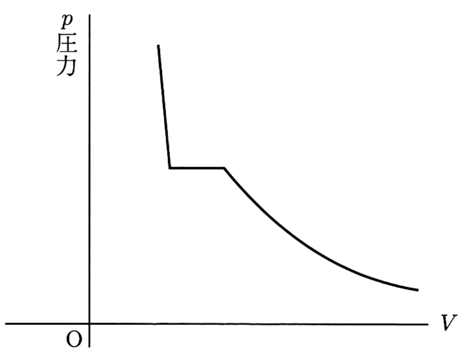


図 2.8　相変化（気体 ↔ 液体）の等温線．

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = a\{e^{-b(x_n - x_{n-1})} - e^{-b(x_{n+1}-x_n)}\} \tag{2.30}$$

である（このように力を通して考えるのはわかりにくいかもしれない）.

この計算の途中で $\phi(r)$ の中にあった $+ar$ という項は打ち消し合い，(2.30) ではこの項の効果はなくなっている．そのため初めから $\phi(r) = (a/b)e^{-br}$ だけ，すなわち指数関数的な反発力だけにしておいたほうがわかりやすくてよかったようにも思われる.

こうして相互作用として反発力だけを考えると，体系はこの反発力のために膨張を続けることになってしまう．これを受けとめて格子が膨張を続けないようにするのがこの項なのである．この項による力は静的に外から加えている応力にほかならない.

消えた項は運動方程式 (2.30) には現れないが，運動方程式の解の中からこの条件に合うものを選ばなければならないわけである（3 粒子が輪をつくる体系では，輪の全長が一定ということが条件になる）.

4.5 ソリトンのエネルギーなど

格子ソリトンの性質を総括しておこう.

粒子の相互作用を

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar \qquad (ab > 0) \tag{2.31}$$

とする.

粒子間の力：

$$\begin{aligned} f_n &= a(e^{-br_n} - 1) & (r_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{m}{b}\beta^2 \mathrm{sech}^2(kn - \beta t) & \left(\beta = \sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh k\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

粒子の変位（次頁［注意］参照）**：**

$$x_n = \frac{1}{b}\log\frac{1 + e^{2(kn-\omega t)}}{1 + e^{2[k(n+1)-\omega t]}}. \tag{2.33}$$

ソリトンによる格子の縮み：

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n = -(x_\infty - x_{-\infty}) = \frac{2k}{b}. \tag{2.34}$$

ソリトンの質量：

$$M = -(x_\infty - x_{-\infty})\frac{m}{h} = \frac{2m}{bh}k \qquad (h = \text{粒子間距離}). \tag{2.35}$$

速度：

$$c = \frac{\omega}{k}h = h\sqrt{\frac{ab}{m}}\frac{\sinh k}{k} \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh k\right). \tag{2.36}$$

運動量：

$$P=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m\frac{dx_n}{dt}=2\sqrt{m\frac{a}{b}}\sinh k=Mc. \tag{2.37}$$

運動エネルギー：

$$\begin{aligned}K&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{m}{2}\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2\\&=\frac{2a}{b}\sinh k\cosh k-\frac{a}{b}\sinh^2 k\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2(kn-\omega t)\\&=\frac{2a}{b}\sinh k\left(\cosh k-\frac{\sinh k}{k}\right).\end{aligned} \tag{2.38}$$

位置エネルギー：

$$\begin{aligned}U&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{a}{b}e^{-br_n}+ar_n\right)\\&=-\frac{2ak}{b}+\frac{a}{b}\sinh^2 k\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2(kn-\omega t)\\&=\frac{2a}{b}\left(\frac{\sinh^2 k}{k}-k\right).\end{aligned} \tag{2.39}$$

ソリトンの全エネルギー：

$$E=K+U=\frac{2a}{b}(\sinh k\cosh k-k). \tag{2.40}$$

［注意］ (2.33) から (2.32) を導き，(2.33) の正しさを確かめよう．

$$\begin{aligned}e^{-bx_n}&=[1+e^{2(k(n+1)-\omega t)}]/[1+e^{2(kn-\omega t)}],\\e^{-bx_{n-1}}&=[1+e^{2(kn-\omega t)}]/[1+e^{2(k(n-1)-\omega t)}].\end{aligned} \tag{2.41}$$

ここで $r_n=x_n-x_{n-1}$ により

$$\begin{aligned}f_n/a&=e^{-br_n}-1=\frac{[1+e^{2(k(n+1)-\omega t)}][1+e^{2(k(n-1)-\omega t)}]}{[1+e^{2(kn-\omega t)}]^2}-1\\&=\left[\frac{e^k-e^{-k}}{e^{kn-\omega t}+e^{-(kn-\omega t)}}\right]^2=\sinh^2 k\,\mathrm{sech}^2(kn-\omega t)\end{aligned} \tag{2.42}$$

となり，これは (2.32) と一致している．したがって (2.33) は（付加定数を除いて）正しい．

なお (2.33) から（$k>0$ として）

$$\begin{aligned}x_\infty&=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}\log\frac{1+e^{2kn}}{1+e^{2kn}e^{2k}}=-\frac{2k}{b},\\x_{-\infty}&=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}\log\frac{e^{-2kn}+1}{e^{-2kn}e^{2k}+1}=0.\end{aligned} \tag{2.43}$$

これにより (2.34) を得る．

第 5 章
非線形格子の積分

5.1　1960年代を超えて

1960 年代の終りの頃は，大学にとっても学界にとっても内外多事な時代であった．1959 年から 1960 年に全国規模で展開された安保闘争（日米安全保障条約改定に対する反対闘争）があり，ことに 1960 年 5 月から 7 月にかけては連日数万人がデモ行進し，国会を包囲して学生の死者も出た．この闘争に対する大学の対応などから学生がいくつかのセクトに分かれて争いを繰り返すようになった．大学の至る所にアジテーションのビラが張られ，アジ演説，投石，火炎ビンなどの騒ぎも稀でなかった．今の学生には想像もつかないことであろう．

初めは米国との安全保障条約の改定反対が焦点であったが，物理学会関係では軍事研究に対する反対だけでなく，米軍に関係のある資金が研究や国際会議に流れることに対する反対にも広がり，いわゆる学園紛争に火がついたのであった．日本物理学会や応用物理学会関係の関係する国際会議でアメリカの学者が米軍機に乗って来日することに対する反対なども問題になり，物理学会の委員長が辞職する騒ぎまで起こったのは 1968 年のことであった．

京都から東京へ戻った私の所へ大阪大学の伊藤順吉さんから突然の電話があり，辞任した前委員長に代って委員長になるので副委員長を引き受けてほしいと依頼された．

当時の日本物理学会は委員会が決定権をもち，委員長は委員会の意見をとりまとめるだけの権限しかもたなかった．そのため，例えば研究集会に反対する集団が会場に押しかけて会を阻害しようとするなどの事態が起こっても学会は急な対応ができない．それで最初の仕事は委員長制をやめて，会長が決定権をもつ学会にするために定款を改めることであった．学会が騒ぎを収拾できなければ，学会がとり潰されるおそれもあった．そのような状況だったので，それからは学会を再出発させる仕事に数年間参加しなければならなかった．

それに加えて数年前から筑波学園都市構想というのが出てきて，私のいた東



図 2.9　ノルウェートロントハイム理論物理学研究所（1974 年頃，画・戸田盛和）.

京教育大学を筑波へ移転させる話がもち上がってきた．初めは見合い程度の話であるなどと言われていたが，移転に同調する黒い雲のようなものが大学を侵し始めた．ことに理学部は思考停止のようになった．それに嫌気がさして 1970 年には大学附置の光学研究所へ移った．朝永先生が停年になった後の理論光学という講座で 1975 年まで理学部兼任を務めた．非線形物理学の先駆者であるアメリカの A.C. Scott（初対面）が光学研究所へ訪ねてきたのを覚えている．1970 年代の初めであっただろう．その頃から海外との交流が忙しくなってきた．

1973 年に NORDITA の援助でノルウェーの Trondheim 大学理論物理学研究所へ行き，1 年間滞在した．同研究所の H. Wergeland 教授（前出の P.C. Hemmer の先生）の招聘であった．この研究所で Hemmer は定員外の特別教授というようなポジションであった．その他には後に学長となり，数年前に来日した Hiis Hange や雑用などをしてくれた Bakke という人，それに 2 人の女性秘書（1 人は事務，もう 1 人はタイプをしてくれた E. Odde さん），それにときどき顔を見せる数人の学生が全員であった．

この恵まれた静かな環境で，私のほとんど唯一の仕事は非線形格子理論について紀要（Studies on a Nonlinear Lattice Arkiv for Det Fysiske Seminari Trondheim, No.2–1974）を書くことであった．この紀要は後に *Physics Reports*, Vol.**18C** No.1 (1975) として出版された．この際はイギリスの D. ter Haar にお世話になった．

紀要を書き上げてから少し講演や講義に出歩いた．ミラノの Scotti (Scott と別の人）に呼ばれてマジョーレ湖の研究所で講演をし，マドリッドの Velarde の所で集中講義をした．マドリッドも学園紛争中で大学をとりまく山の上から兵隊が監視していた．学生が集会をしようとすると下りてきて蹴散らすということであった．しかし街は平穏で，ドン・キホーテの銅像の周りはにぎやかであった．

5.2 力学系のカオス

5.2.1 可積分系

コペンハーゲンの隣町リングビー（Lyngby）で催された非線形力学の国際会議に招かれたことがある（1992）．晩餐会のスピーチを頼まれて次のような話をした．

『デンマークの科学史上で最初に挙げなければならないのはティコ・ブラーエ（Tycho Bráhe）である．彼の精密な惑星観測のデータを用いてケプラー（J. Kepler）は有名な惑星運動の3法則（ケプラーの法則）を発見した．この法則は太陽を回る軌道が位置と運動量の空間（位相空間）の中で滑らかな超曲面上にあることを示すものである．言い換えれば，惑星の運動が積分可能な運動であることをケプラーは発見したのである．これはトリビアルでない積分可能系の最初の発見であった．』

次いで私は木星を回る衛星のみかけの運動から光の速さを初めて見出したレーマー（O.C. Roemer）や電流の磁気作を初めて発見したエルステッド（H.C. Ørsted）および原子模型を発明したボーア（N. Bohr）の偉業に言及した．これらの人の仕事がすべて新しい科学分野を開くものであったのは驚くべきことである．

さて，太陽をめぐる1個の惑星（ケプラー問題）の運動方程式はもちろん非線形であるが，エネルギー積分以外に角運動量積分（面積速度の法則）などがあるので積分可能系である．

ニュートンはケプラーの法則を知っていて，これを導くために万有引力の法則を仮定したのであった．これがニュートン力学を輝かしい成功の座へと導いたのであった．この場合にも，他の多くの場合と同様に，積分可能系であったことが大きな説得力となり，また大きな満足感を与えたのであった．ふつうはガリレイからニュートンへという科学の系譜が強調されるが，もしもティコ・ブラーエとケプラーという先駆者がなかったら，また太陽系が高い近似において積分可能系でなかったら，ニュートンの成功はなかったに違いないし，少なくとも科学の確立は何十年か遅れたであろうと思われる．

ニュートン以後，太陽系の観測は精密化し，惑星相互の万有引力をとり入れた理論は精度の高い近似として発展した．しかし太陽と2個以上の惑星が相互作用するときの天体力学（3体問題）は積分不可能であるという困難にぶつかった．太陽系は果たして安定であるかという懸賞金のかかった問題にチャレンジしたポアンカレ（J.H. Poincaré）は，この力学系の運動がとてつもなく複雑であることを見出した．「彼はカオスを見ていた」のである．このとき彼は解析的に解けない力学系の振舞いを分類する方法も考え出した．**位相空間**（位置・運動量空間）での運動のトポロジカルな様相を論じることは**ポアンカレ写像**と呼ばれる．

5.2.2 アトラクタ

［1 変数］ 変数 x の時間変化 $x(t)$ を与える式として例えば

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.44}$$

を考えよう．ある時刻 t における x の値 $x(t)$ が与えられると次の瞬間 $t+\tau$ における値 $x(t+\tau)$ が $x(t+\tau) = x(t) + f(x)\tau$ で与えられ，こうして x が時間 t の関数として定まっていく．

［2 変数］ 例として真空管による発振の機構を表すファン・デル・ポール（B. van der Pol）の方程式（非線形方程式）

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{2.45}$$

を考えよう．この方程式は 2 変数 x と v を用いて

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varepsilon(1-x^2)v - x \tag{2.46}$$

と書ける．一般に 2 変数（x と v）に対する方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,v), \quad \frac{dv}{dt} = g(x,v) \tag{2.47}$$

は，ある瞬間 t における x と v の値を与えれば，次の瞬間 $t+\tau$ における x と v の値を定めるから，次々に x と v の運動が決定される．したがってこのような体系（力学系）の運動は x と v を座標とする平面（相平面）上の軌道によって表すのが便利である．

このような 2 変数力学系の解の例としてファン・デル・ポール方程式の解を図 2.10 に示す．x の振幅が小さいときは上式の項 $-\varepsilon(1-x^2)dx/dt$ ($\varepsilon > 0$) は振動を増大させる『負抵抗』として働き，発振が起こる．逆に振幅 x が大きくなると上の項は正になることが多くなるので正の抵抗として働くので，振動は押さえられて減衰する．そのため，いずれの場合でも軌道はある周期運動（**リミットサイクル，極限軌道**）に近づくことになる．

さて，一般の 2 変数力学系 (2.47) に戻って，軌道が相平面の有限な

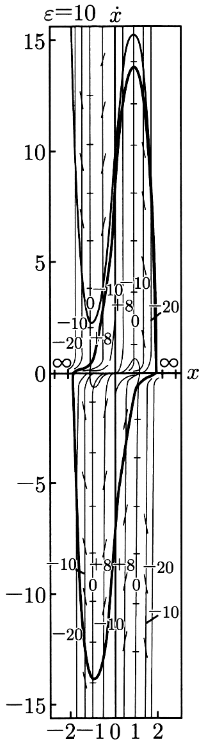


図 2.10 (a) ファン・デル・ポール方程式の極限軌道（リミット・サイクル）の例．

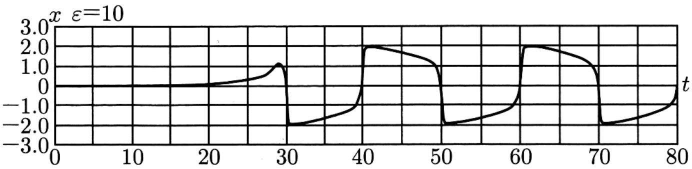


図 2.10 (b) ファン・デル・ポール方程式の波形（自励振動）．

範囲に限られている場合を考えよう．

(i) エネルギーが保存される場合は，軌道はエネルギー $E(x,v)=$ 一定の閉曲線，すなわち周期運動になる．

(ii) エネルギーの出入りが可能な場合には，ファン・デル・ポール方程式のように軌道は極限軌道に漸近するか，線形の減衰振動のように安定な平衡点へ近づく．軌道はこの 2 つのいずれかに引きつけられるので，これを**アトラクタ**と言う．

方程式 (2.47) による運動は一義的に決定されるから，相平面において軌道は交わることがない．このため 2 変数の場合，アトラクタは安定な平衡点と極限軌道の 2 つに限られる．

外力が加わっているときは，相平面に垂直に時間軸 t を加えて運動を表すと，外力の影響が明らかになる場合がある．

2 変数力学系のアトラクタは上の 2 種類しかないが，3 変数の場合は次に述べるようにストレンジ・アトラクタという奇妙なものもあり得る．

[3 変数] 3 変数の力学系

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y,z),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y,z),\quad \frac{dz}{dt}=h(x,y,z) \tag{2.48}$$

を考える．f,g,h は時間 t を含まず，一義的な関数とする．これを**決定論的力学系**と言う（前述の 1 変数 2 変数の力学系もこれに限定していたのであるが，特に限定しなかった）．

運動方程式 (2.48) の運動の軌道は 3 次元位相空間 (x,y,z) 内の曲線になるが，3 次元曲線は図にしにくいし，無理して描いてもわかりにくい．

しかし決定論的な力学系では軌道は交わらない．したがって交わりそうになっても，軌道は図 2.11 のように立体交差するに違いない（直観的にそう考えられるだろう）．特別な場合として，軌道が図 2.11 のように 2 つの平面の間をときどき移行する場合が考えられる．軌道は太さが無限に細い線であるから，3 次元的に複雑な極限軌道を描くことも可能である．このような複雑なアトラクタ

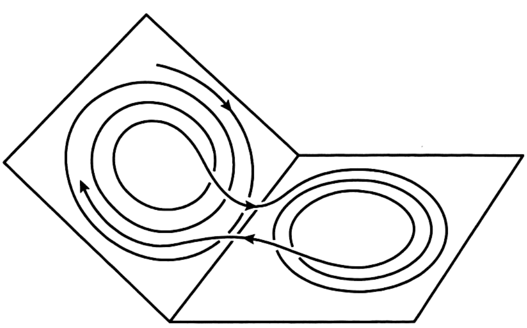


図 2.11 ストレンジ・アトラクタを生じる軌道の概念図．

をストレンジ・アトラクタと呼ぶ.

Poincaré はストレンジ・アトラクタを見ていたと思われる. 比較的最近に, ストレンジ・アトラクタはカオスのタイプとして復活した. 気象学者ローレンツ (E. Lorenz) は気象現象を表すモデル方程式として 3 変数の非線形方程式を調べた. そしてその方程式が図 2.11 に示したようなストレンジ・アトラクタを生じることを発見したのである.

5.2.3 初期値敏感性

力学系がストレンジ・アトラクタをもつとき, 運動は決定論的であるにも関わらず, 初期値を極くわずか変えただけで, 以後の軌道は大きく異なったものになり, その意味で予測不能である. これを**初期値敏感性**とか, **決定論的カオス**と言っている. カオスが生じる連続力学系 (変数 $x, y, \cdots$ が連続値をとり得る力学系) はストレンジ・アトラクタをもち, 少くとも 3 以上の変数をもつ.

多変数の力学系は一般に初期値敏感性をもつカオス系である. 前に述べたケプラー運動のように素直な積分可能系は世の中の例外的なものにすぎない. 世の中のほとんどすべての力学系はカオス系であり, 積分不可能系であると言ってよいだろう.

古典力学では運動方程式があり, それを解析的に解くのが問題を解くということであるが, 初期値敏感性と決定論的カオスが普遍的であることを考えれば, 積分可能系は特別な理想世界であると言わなければならないことになる.

5.3 エノン・ハイレス系

5.3.1 ポアンカレ写像

変数の数が 3 以上になると軌道は多次元空間の曲線となり, 図示することができなくなる. この場合は変数空間を 2 次元平面で切って, 断面を図示する方法が考えられる. この断面図をポアンカレ写像 (surface of section) と言う. 具体的な例を挙げよう.

フランスのニースにある天文台のエノン (M. Hénon) は軸対称の銀河が作る重力場の中の一つの星の運動をポアンカレ写像で調べた. 対称軸を z 座標とし, 星に働く重力と遠心力のポテンシャルを展開して 3 次の項で打ち切り

$$U = U_{\mathrm{c}} + \frac{1}{2}a_0(r-r_0)^2 + \frac{1}{2}c_0 z^2 + a_1(r-r_{\mathrm{c}})z^2 - c_1(r-r_{\mathrm{c}})^3 + \cdots$$

とする (銀河は $z=0$ の面の上下で対称とする).

ここで適当な尺度変換 $(z, r) \to (q_1, q_2)$ を行うと

$$U(q_1, q_2) = q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{r^3}{3}\sin 3\theta$$

とすることができる (ここで $q_1 = r\cos\theta, q_2 = r\sin\theta$ とおいて, このポテン

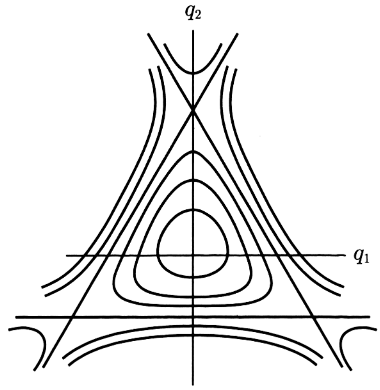


図 2.12　正 3 角形のポテンシャル．

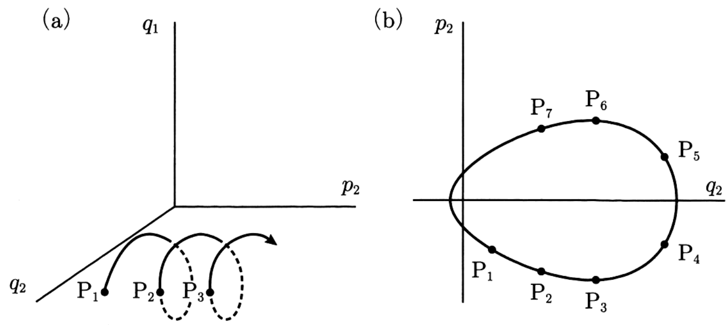


図 2.13　ポアンカレ写像の説明．

シャルが正 3 角形の皿の形をしたものであることを示しておいた（図 2.12)）．

q_1 と q_2 に正準共役な運動量は $p_1 = \dot{q}_1$，$p_2 = \dot{q}_2$ であり，ハミルトニアンは

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$$

となる．

$q_1 = 0$，$q_2 = 1$ において $\partial U/\partial q_1 = \partial U/\partial q_2 = 0$ であり，この点を含む正 3 角形の頂点が U の峠（鞍部点）であることが容易に示される．峠における U の値は $E_c = 1/6 = 0.1666\cdots$ であり，エネルギー E が E_c よりも低ければ運動はポテンシャルの谷の中で行われるが，E_c を越えると峠を越えて外へ出てしまうことが可能である．

この場合，変数は (q_1, q_2, p_1, p_2) で，変数の数は 4 である．そこで $q_1 = 0$ を通り，q_1 軸に垂直で q_2 軸と p_2 軸の 2 軸を含む平面を，軌道が $p_1 > 0$ の向きに切る点 $(P_1, P_2, \cdots)$ をこの平面 (q_2, p_2) 上にプロットする．これらの点 $(P_1, P_2, \cdots)$ が滑らかな曲線の上に乗るときはこの曲線も図示する（図 2.13)．数値計算の結果を図 2.14 に示す．

この結果から次のようなことがわかる．

$E = 1/12 = 0.08333\cdots$ のとき，$(P_1, P_2, \cdots)$ は滑らかな曲線の上に乗る（図 2.14 (a))．これは軌道がある超曲面の上にあることを意味し，この超曲面

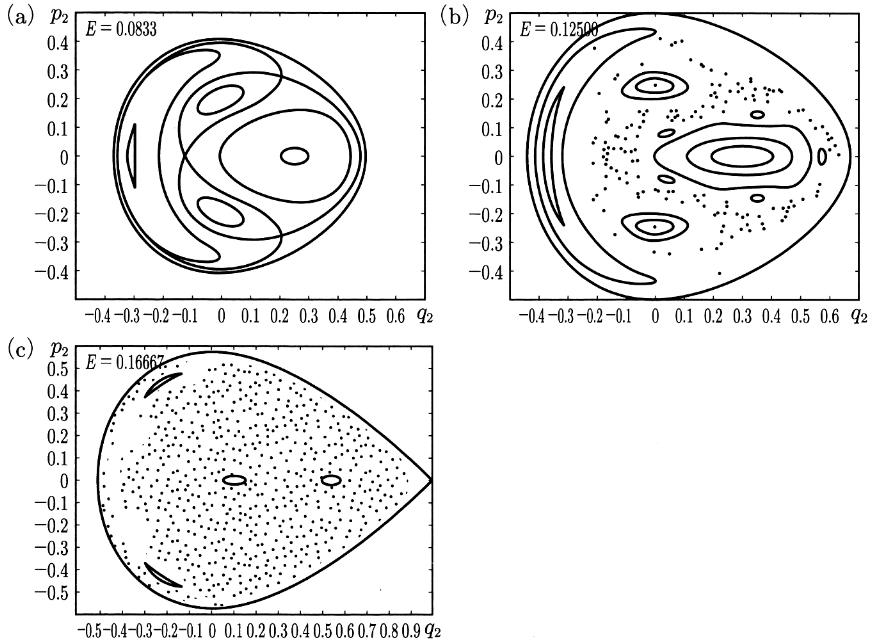


図 2.14　エノン・ハイレス系のポアンカレ写像.

はエネルギーと異なり，少くとも近似的な運動の定数（運動の積分，エネルギーと異なる積分，第 3 積分と言う）である.

$E = 1/8 = 0.12500$ に上げると運動領域は滑らかな曲線で覆われた領域とそうでない領域（カオス的な領域）に分かれる（図 2.14 (b)）．この図でカオス的な領域の多数の点は 1 つの初期条件から出発した軌道が平面 (q_2, p_2) を切る点である.

さらにエネルギーを $E = 1/6 = 0.166\cdots$ に上げるとほとんどすべての領域がカオス的になる（図 2.14 (c)）.

この体系（エノン・ハイレス系）ではエネルギーが低いときには近似的に積分可能系であり，エネルギーが高くなるとカオス的になるのである.

エネルギーの高さによって 1 つの体系が積分可能系からカオス系へ移る遷移は詳しく検討する価値があると思われるが，研究は少ない.

5.4　可積分性のテスト

1970 年代の初めに非線形格子の理論は新たな展開を見せた．これはアメリカのジョージア工科大学にいたフォード（J. Ford）の報告から始まった．これは指数格子が可積分系であることを強力に支持する数値的なテストである.

Ford は 3 個の粒子からなる周期的な輪の形の体系を考え，各粒子の 1 次元的な運動を調べた．その結果を先に述べておこう.

粒子間の相互作用のポテンシャルが

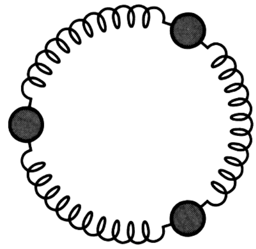


図 2.15　3 粒子周期格子.

$$\phi(r) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{\alpha}{3}r^3 \tag{2.49}$$

の場合はエノン・ハイレス系と同等である．したがって体系はカオス的な運動をする．

粒子間のポテンシャルが指数型，すなわち

$$\phi(r) = e^{-r} + r - 1$$

の場合は軌道は至る所滑らかである．したがって指数型ポテンシャルの場合は積分可能系であると考えられる．

粒子間の相互作用が調和的，すなわち

$$\phi(r) = \frac{1}{2}r^2$$

である場合はもちろん可積分系であるが，そのハミルトニアン H_0 などを書いておこう．粒子の座標を Q_1, Q_2, Q_3 とし，運動量を P_1, P_2, P_3 とすると，3 粒子周期系（図 2.15）のハミルトニアンは

$$H_0 = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2}\{(Q_1 - Q_2)^2 + (Q_2 - Q_3)^2 + (Q_3 - Q_1)^2\}$$

となる．これは主軸変換

$$Q_i = \sum_j A_{ij}\zeta_j, \quad P_i = \sum_j A_{ij}\eta_j \tag{2.50}$$

ただし

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 6^{-1/2} & 2^{-1/2} & 3^{-1/2} \\ -(2/3)^{1/2} & 0 & 3^{-1/2} \\ 6^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} \end{pmatrix}$$

によって

$$H_0 = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + \frac{3}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$$

となる．ζ_3 は H_0 に現れない．これは全運動量

$$P_1 + P_2 + P_3 = \sqrt{3}\eta_3$$

が保存される量（循環座標）であるからである．

5.4.1　3 次の非線形項がある場合

バネのポテンシャルが

$$\phi(r) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{\alpha}{3}r^3$$

と書けるとすると，ハミルトニアンは

$$H = H_0 + \frac{\alpha}{3}\{(Q_1 - Q_2)^3 + (Q_2 - Q_3)^3 + (Q_3 - Q_1)^3\} \tag{2.51}$$

となる．これに上の主軸変換を行うと (2.51) は

$$H = \frac{1}{2}\left\{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 3(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\right\} + \frac{3\alpha}{\sqrt{2}}\left(\zeta_1^2\zeta_2 - \frac{1}{3}\zeta_2^3\right)$$

となる．

η_3 は運動の定数であるからこれを除外すると運動方程式は

$$\begin{aligned}
&\dot{\zeta}_1 = \frac{\partial H}{\partial \eta_1} = \eta_1, \quad \dot{\zeta}_2 = \frac{\partial H}{\partial \eta_2} = \eta_2, \\
&\dot{\eta}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \zeta_1} = -3\zeta_1 - 3\sqrt{2}\alpha\zeta_1\zeta_2, \\
&\dot{\eta}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \zeta_2} = -3\zeta_2 - \frac{3\alpha}{\sqrt{2}}(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

となる．これはエノン・ハイレス系の運動方程式に似ているが，最後の式が少し異なっている．そこで尺度変換

$$\begin{aligned}
&\zeta_1 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}q_1, \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}q_2, \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}}\tau, \\
&\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\eta_1 = p_1, \quad \frac{\alpha}{\sqrt{6}}\eta_2 = p_2
\end{aligned} \tag{2.53}$$

を行えば，運動方程式 (2.52) は

$$\begin{aligned}
&\frac{dq_1}{d\tau} = p_1, \quad \frac{dq_2}{d\tau} = p_2, \\
&\frac{dp_1}{d\tau} = -q_1 - 2q_1q_2, \quad \frac{dp_2}{d\tau} = -q_2 - q_1^2 + q_2^2
\end{aligned} \tag{2.54}$$

となる．これはエノン・ハイレス系の運動方程式と全く同じである．

この体系は 4 個の変数 (q_1, q_2, p_1, p_2) で記述され，エノン・ハイレス系と同様に，エネルギーが少し大きくなるとカオス的な振舞いをする．したがって積分不可能系である．

5.4.2 相互作用が指数型の場合

$$\phi(r) = e^{-r} + r - 1$$

としよう．ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + e^{-(Q_2 - Q_1)} + e^{-(Q_3 - Q_2)} + e^{-(Q_1 - Q_3)} - 3$$

と書ける．最後の項 -3 は運動がないとき，すなわち $P_i = Q_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ のとき $H = 0$ になるようにつけ加えてある．変位が小さいとして展開し，r^3

の項までとると

$$\phi(r) = e^{-r} + r - 1 \simeq \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6}r^3$$

となり，3 次の非線形項までとった (2.49) の場合（$\alpha = -1/2$）と比較できる．

このことを念頭において 2 次の項の主軸変換 (2.50) と尺度変換 (2.53) を加えるとハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{24}[\exp(2q_2 + 2\sqrt{3}q_1) + \exp(2q_2 - 2\sqrt{3}q_1) + \exp(-4q_2)] - \frac{1}{8}$$

となり，運動方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{d\tau} &= p_1, \quad \frac{dq_2}{d\tau} = p_2, \\
\frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{4\sqrt{3}}[-\exp(2q_2 + 2\sqrt{3}q_1) + \exp(2q_2 - 2\sqrt{3}q_1)], \qquad (2.55) \\
\frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{6}\exp(-4q_2) - \frac{1}{12}[\exp(2q_2 + 2\sqrt{3}q_1) + \exp(2q_2 - 2\sqrt{3}q_1)]
\end{aligned}$$

となる．これらの式で q_1，q_2 が小さいとして exp を展開すると (2.54) になることが容易に確かめられる．

(2.55) を数値的に解いた結果を図 2.16 に示す．これは軌道を q_2 と p_2 を含む面で切ったポアンカレ写像である．この場合，エネルギー $E = H$ をいくら上げても軌道は常に滑らかな曲線の上に乗っている．これはこの体系が積分可能系であることを明白に示している．

5.4.3　固定端の場合

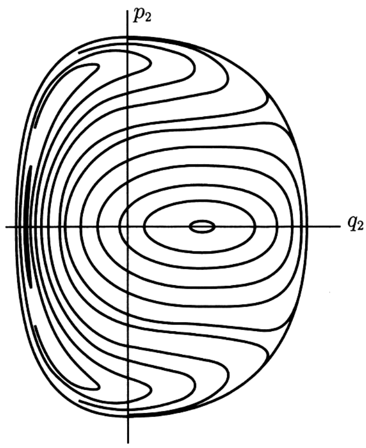
指数型相互作用

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar$$

をもつ非線形格子はソリトン解，周期解などの特解があり，これらの解はエネルギーがどれほど高くても安定である．このことからこの格子は完全な可積分系であるかもしれないと思われる．

斎藤信彦さんはこの問題を両端固定の 2 粒子系（図 2.17）で数値的に検証した（1970 頃）．

2 粒子の座標を x_1，x_2 とし，x_1 軸を $\dot{x}_1$ 軸に垂直な平面で切ったポアンカレ写像の一例を図 2.18 に示す．この場合 $a = b = 1$ とし，粒子の質量は $m = 1$ としている．図 2.18 (a) で右上の部分は 2 粒子が同方向へ運動している状態（進行波）であり，下の部分は 2 粒子が逆方向へ運動している状態（定在波）である．エネルギーを $E = 4.559$ から $E = 1485.4$ まで上げても軌道の様子は変わらず（図 2.18 (b)），この体系が完全な可積分系であることは確実と思われる．



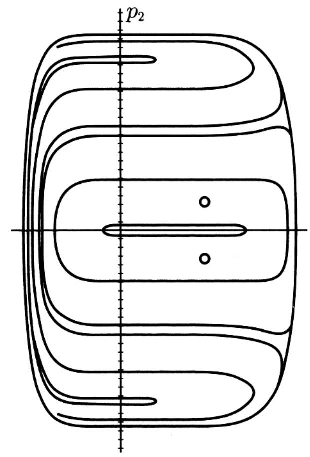


図 2.16 (a)　3 粒子周期的指数格子 $E = 1$.　**図 2.16 (b)**　3 粒子周期的指数格子 $E = 256$.

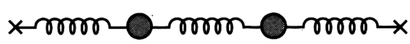
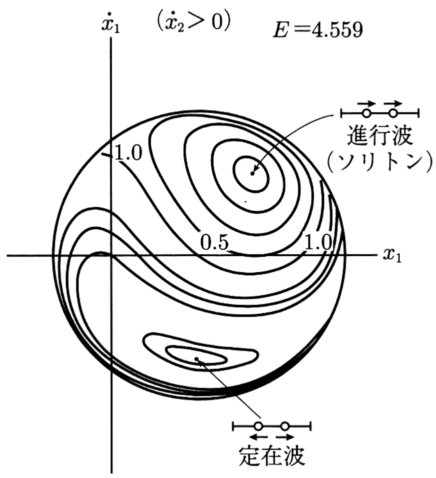


図 2.17　両端固定の 2 粒子系.



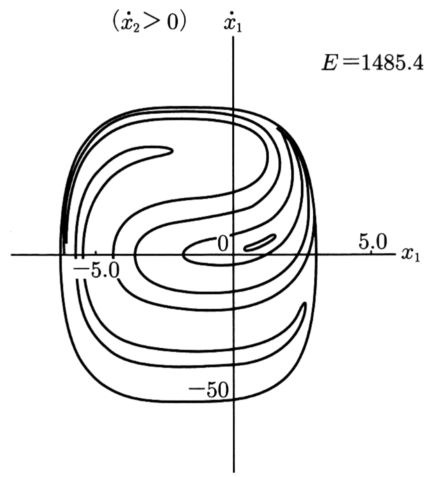


図 2.18 (a)　2 粒子指数格子の Poincaré 写像 $E = 4.559$.　**図 2.18 (b)**　2 粒子指数格子の Poincaré 写像 $E = 1485.4$.

5.5　指数格子の保存量

指数格子が可積分系であることを強力に支持する J. Ford の数値的な論証はフランスのエノン（Hénon）とアメリカのフラシュカ（Flaschka）を大きく刺激し，彼らはこれを理論的に決定づける論文を発表した（1974）．

Hénon の論文は周期的で一様な指数格子は粒子数だけの運動の定数をもつということを代数的に証明したものであった．Flaschka の論文もこの格子が粒子の個数だけの運動の定数をもつことを示したものであるが，その証明は解析的

で Hénon のよりもわかりやすい．それで次には Flaschka の方法を説明する．

驚いたことに，Flaschka はこの論文と同時にこの格子の運動方程式を積分する方法を明らかにした別の論文を同時に発表したのであった．この積分方法は前に KdV 方程式の積分方法として開発された逆散乱法を不連続な格子系に適用したものであった．これについても述べたいが，たいへん長くなるので他の本（例えば戸田盛和『非線形格子力学』岩波書店，1976 年）を参照されたい．

Flaschka は指数格子の運動方程式を行列形式で扱った．そして N 個の粒子からなる周期系指数格子は N 個の独立な運動の定数をもつことを証明した．ここで運動の定数とは，全運動量，全エネルギーなどのように，体系の運動によらず一定に保存される量（保存量）のことである．多数の保存量があるときはいくつかの保存量の関数はやはり保存量であるが，互いに関数関係にないような保存量どうしは独立であると言う．

1 個の粒子の状態はその位置と運動量（あるいは速度）を表す 2 つの変数で記述され，N 個の粒子からなる体系の状態の自由度は $2N$ である．自由度 $2N$ の力学系が N 個の滑らかな保存量をもつとき，その体系は（リゥヴィル（Liouville）の意味で）積分できる（積分可能系である）と言う．

前節で述べたように，Ford は 3 粒子からなる周期的な指数格子は滑らかな保存量をもつことを数値的に明らかにした（1970）．これに触発されて Flaschka は N 個の粒子からなる周期的な指数格子は N 個の独立な保存量をもち，したがって積分可能系であることを示した（1974）．このとき，彼は格子の運動方程式を行列で表現した．

わかりやすくするため，まず 3 粒子の場合から説明しよう．指数格子の運動方程式はこの場合

$$
\begin{aligned}
&\frac{dP_1}{dt} = e^{-(Q_1-Q_3)} - e^{-(Q_2-Q_1)}, \quad \frac{dP_2}{dt} = e^{-(Q_2-Q_1)} - e^{-(Q_3-Q_2)}, \\
&\frac{dP_3}{dt} = e^{-(Q_3-Q_2)} - e^{-(Q_1-Q_3)}, \quad P_1 = \frac{dQ_1}{dt}, \quad P_2 = \frac{dQ_2}{dt}, \quad P_3 = \frac{dQ_3}{dt}
\end{aligned}
$$

と書ける．ここで

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&a_1 = \frac{1}{2}e^{-(Q_2-Q_1)/2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}e^{-(Q_3-Q_2)/2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}e^{-(Q_1-Q_3)/2}, \\
&b_1 = \frac{1}{2}P_1, \quad b_2 = \frac{1}{2}P_2, \quad b_3 = \frac{1}{2}P_3
\end{aligned}
}
$$

とすると (a_n, b_n) に対する運動方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{da_1}{dt} = a_1(b_1 - b_2), \quad \frac{da_2}{dt} = a_2(b_2 - b_3), \quad \frac{da_3}{dt} = a_3(b_3 - b_1), \\
&\frac{db_1}{dt} = 2(a_3^2 - a_1^2), \quad \frac{db_2}{dt} = 2(a_1^2 - a_2^2), \quad \frac{db_3}{dt} = 2(a_2^2 - a_3^2)
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

となるが，ここで行列

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

を導入すると運動方程式 (2.56) は

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = BL - LB} \tag{2.57}$$

となる．この形の式は**ラックス**（P.D. Lax）**形式**と呼ばれる．L は $L_{ij} = L_{ji}$ を満たす対称行列であり，B は $B_{ij} = -B_{ji}$ を満たす反対称行列であり，実数の行列（実行列）である．したがって行と列をとりかえたエルミート共役を $B^\dagger$ と書くと

$$B^\dagger = -B$$

である．そこで

$$\frac{dU(t)}{dt} = BU(t), \quad U(0) = 1 \tag{2.58}$$

を満足する行列 $U(t)$ を考えると $U(t)$ の逆行列は $U(t)^{-1} = U^\dagger(t)$ であることが示されるので

$$\frac{dU(t)^{-1}}{dt} = -U(t)^{-1}B$$

である．このとき

$$L = U(t)L(0)U(t)^{-1}$$

が成り立つことが示される．ここで $L(0)$ は $t = 0$ における L の値である．

実際 (2.58) により

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dU(t)}{dt}L(0)U(t)^{-1} + U(t)L(0)\frac{dU(t)^{-1}}{dt} = BL - LB$$

したがって (2.57) が成立する．

これらのことは粒子数が $N = 3$ でないときも成り立つ．以下では N 個の粒子からなる周期的な指数格子を考えよう．

[N 個の保存量]

L は N 行 N 列の行列である．これに対し N 行のベクトル

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$$

が

$$\boxed{L\varphi = \lambda\varphi} \tag{2.59}$$

を満たすとき λ を固有値（保存量），φ を固有ベクトル（固有関数）と言う．

行列表示をとれば (2.59) は

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

と書ける．ここで I は N 行 N 列の単位行列 $I_{ii} = 1$, $I_{ij}\,(i \neq j) = 0$, det は行列式を意味する．

指数格子の運動に対して $L = U(t)L(0)U(t)^{-1}$ が成り立つので

$$\det\{U(t)(L(0) - \lambda I)U(t)^{-1}\} = 0,$$

あるいは一般に $\det[U(t)AU(t)^{-1}] = \det A$ であるから，固有値 λ は時間 t によらない方程式

$$\det[L(0) - \lambda I] = 0 \tag{2.60}$$

によって与えられる．ここで $L(0)$ は N 行 N 列の行列なので固有値は N 個存在し，すべて時間によらない量である．したがってこれらの固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots,$ λ_N とすると (2.60) を展開して

$$\begin{gathered}
\lambda_1^N + C_1\lambda_1^{N-1} + C_2\lambda_1^{N-2} + \cdots + C_{N-1}\lambda_1 + C_N = 0, \\
\lambda_2^N + C_1\lambda_2^{N-1} + C_2\lambda_2^{N-2} + \cdots + C_{N-1}\lambda_2 + C_N = 0, \\
\vdots \\
\lambda_N^N + C_1\lambda_N^{N-1} + C_2\lambda_N^{N-2} + \cdots + C_{N-1}\lambda_N + C_N = 0
\end{gathered}$$

となる．

$C_1, C_2, \cdots, C_N$ は a_n, b_n を通して時間の関数であるが，上の連立方程式を $C_1, C_2, \cdots, C_N$ について解いたとすると，これらは $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ の関数として与えられる．そして $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ は保存量であるから $C_1, C_2, \cdots, C_N$ も保存量である．

[$N = 3$ の場合]

この場合は

$$\det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} b_1 - \lambda & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 - \lambda & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

と書ける．根と係数の関係から

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 \text{の係数}: \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b_1 + b_2 + b_3 = -C_1, \\
&\lambda^1 \text{の係数}: \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = C_2, \\
&\lambda^0 \text{の係数}: \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = b_1b_2b_3 - b_1a_2^2 - b_2a_3^2 - b_3a_1^2 + 2a_1a_2a_3 = -C_3
\end{aligned}$$

を得る．ここで全運動量は

$$P=\sum_{n=1}^{3}P_n=2\sum_{n=1}^{3}b_n$$

であるからすなわち λ^2 の係数 $C_1=$ 一定 は全運動量の保存と関係がある．すなわち

$$P=2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3).$$

また λ^2 の係数の 2 乗から λ^1 の係数の 2 倍を引けば全エネルギー H の半分になる．すなわち

$$\begin{aligned}H&=\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{2}P_n^2+\sum_{n=1}^{3}e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}=2\sum_{n=1}^{3}(b_n^2+2a_n^2)\\&=2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)=2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+4(a_1^2+a_2^2+a_3^2).\end{aligned}$$

故に λ^1 の係数は全エネルギーの保存と関係がある．しかし λ^0 の係数 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ はふつうの力学系にない保存量である．

5.6 多数のソリトンを含む解

KdV 方程式や指数格子の運動をソリトンの集まりとして表す方法は，逆散乱法だけでなく，いくつか考えられている．ここでは行列式を用いて表現した解を記すことにし，比較のため KdV 方程式の解と指数格子の解を並べておく．

ソリトンの総数を g 個とし，ソリトン i $(i=1,2,\cdots,g)$ の固有値（ソリトンの強さ）を κ_i，時刻 $t=0$ におけるソリトンの位置に関係したパラメータを c_i とする．κ_i と c_i はいわゆる初期データとして与えられたものとする．

5.6.1 KdV 方程式の解

KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

の解は

$$u(x,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\det A$$

で与えられる．ただしここで A は g 行 g 列の行列であり，その要素は

$$A_{ij}=\delta_{ij}+\frac{c_ic_j}{\kappa_i+\kappa_j}e^{-(\eta_i+\eta_j)},\quad \eta_i=\kappa_i x-4\kappa_i^3 t,\quad \eta_j=\kappa_j x-4\kappa_j^3 t$$

である．また δ_{ij} は

$$\delta_{ii}=1,\quad \delta_{ij}=0\quad (i\neq j)$$

とする．

$g = 1$ の場合は $\det A = A_{11}$ であり

$$A_{11} = 1 + \frac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{-2(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t)} = 1 + e^{-2(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1)}.$$

これから

$$u(x,t) = 2\kappa_1^2 \mathrm{sech}^2(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1),$$

ただし

$$\frac{c_1^2}{2\kappa_1} = e^{-2\delta_1}.$$

フラシュカ



左：フラシュカ，右：マクラフリン（1978）．

フラシュカ（Flaschka）という名は珍しいもののように思ったので，どこの出かと聞いた．30 年も前のことなので詳しいことは忘れてしまったが，何でもブルガリアあたりの出身だという話だった．叔母さんか伯母さんが宮中と関係があったらしい．子供のときアメリカへ渡り，英語を熱心に勉強した．フォードさんの話では平均のアメリカ人より立派な英語を使えるそうである．

大学を出てからしばらくは，これといった仕事ができなかったそうである．1970 年代の初めに非線形格子の問題に触れることができたのは彼にとって大きな幸いであったに違いない．指数格子のスペクトルの不変性，逆散乱法の 2 つの論文は実に鮮やかに彼のデビューを印象づけた．この仕事が日本でなくアメリカでなされたということはちょっと残念な気もする．

フラシュカは日本へ来るにあたってカタカナを勉強してきて，看板などをしきりに読んでビールとビルは違うのですねとか，カタカナでもソリトンと書くのは難しいなどと言っていた．

フラシュカはマクラフリン（D.W. McLaughlin）やフォードと一緒に何度か来日して日本の研究者に大きな刺激を与えた．初めてフラシュカに会ったときは，とにかく若さを感じた．ゆきがかり上 *Physica* D の編集に時間をさかれるようになったのではないか，と気の毒な気がする．

つき合った日本見物でフラシュカが一番気に入ったのは浅草の仲見世通りで，マクラフリンの気に入ったのは秋葉原の電気店であったらしい．

フラシュカのいるアリゾナのツーソン（Tucson）は乾燥した土地で，彼の家を訪問したとき，玄関で握手したら静電気がパチンとはねて驚かされた．

$\boldsymbol{g=2}$ の場合は

$$
\det A = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{c_1^2}{2\kappa_1}e^{-2\eta_1} & \dfrac{c_1c_2}{\kappa_1+\kappa_2}e^{-(\eta_1+\eta_2)} \\ \dfrac{c_1c_2}{\kappa_1+\kappa_2}e^{-(\eta_1+\eta_2)} & 1+\dfrac{c_2^2}{2\kappa_2}e^{-2\eta_2} \end{vmatrix}
$$
$$
= 1 + A_1 e^{-2\eta_1} + A_2 e^{-2\eta_2} + A_3 e^{-2(\eta_1+\eta_2)}.
$$

ここで

$$
A_1 = \frac{c_1^2}{2\kappa_1}, \quad A_2 = \frac{c_2^2}{2\kappa_2}, \quad A_3 = \left(\frac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2}\right)^2 A_1A_2,
$$
$$
\eta_1 = \kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t, \quad \eta_2 = \kappa_2 x - 4\kappa_2^3 t
$$

である．

5.6.2 指数格子の多ソリトン解

n 番目の粒子の変位を Q_n とし，格子の運動方程式を

$$
\frac{d^2Q_n}{dt^2} = e^{-(Q_n-Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}
$$

とする．

$$
e^{-(Q_n-Q_{n-1})} - 1 = \frac{d^2}{dt^2}S_n
$$

とおき，運動方程式は

$$
\log\left(1+\frac{d^2S_n}{dt^2}\right) = S_{n-1} - 2S_n + S_{n+1}
$$

となり，その解は

$$
S_n = \log\det B(n)
$$

で与えられる．ただし，ここで B は g 行 g 列の行列式であり，その ij 要素は

$$
(B(n))_{ij} = \delta_{ij} + \frac{c_ic_j(z_iz_j)^n}{1-z_iz_j}e^{(\beta_i+\beta_j)t},
$$

ただし

$$
z_i = e^{-\kappa_i}, \quad \beta_i = \sinh\kappa_i \qquad (i=1,2,\cdots,g)
$$

である．

$\boldsymbol{g=1}$ の場合は $\det B(n) = (B(n))_{11}$ であって

$$
(B(n))_{11} = 1 + \frac{c_1^2 z_1^{2n}}{1-z_1^2}e^{2\beta_1 t} = 1 + e^{-2(\kappa_1 n - \beta_1 t + \delta_1)},
$$
$$
e^{-(Q_n-Q_{n-1})} - 1 = \beta_1^2 \mathrm{sech}^2(\kappa_1 n - \beta_1 t + \delta_1),
$$
$$
z_1 = e^{-\kappa_1}, \quad \beta_1 = \frac{z_1^{-1}-z_1}{2} = \sinh\kappa_1, \quad \frac{c_1^2}{1-z_1^2} = e^{-2\delta_1}
$$

となる．

$g=2$ の場合は

$$\det B(n) = 1 + A_1 e^{-2(\kappa_1 n - \beta_1 t)} + A_2 e^{-2(\kappa_2 n - \beta_2 t)} + A_3 e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)n + 2(\beta_1+\beta_2)t},$$

$$A_1 = \frac{c_1^2}{1-z_1^2}, \quad A_2 = \frac{c_2^2}{1-z_2^2},$$

$$A_3 = \left\{ \frac{1}{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} - \frac{1}{(1-z_1 z_2)^2} \right\} c_1^2 c_2^2 = \frac{(z_1-z_2)^2}{(1-z_1 z_2)^2} A_1 A_2,$$

$$z_1 = e^{-\kappa_1}, \quad z_2 = e^{-\kappa_2}, \quad \beta_1 = \sinh\kappa_1, \quad \beta_2 = \sinh\kappa_2$$

となる.

5.7 テータ関数

5.7.1 周期波とソリトン

ここで扱ってきたソリトンは 1 つの山 sech^2 で特長づけられ，さらにこれは $1+e^{2\alpha v}$ から

$$\alpha^2 \mathrm{sech}^2 \alpha v = \frac{d^2}{dv^2} \log(1 + e^{\pm 2\alpha v}) \tag{2.61}$$

によって導かれる.

他方で周期波は cnoidal 波 $\mathrm{dn}^2(2Kv) - E/K$ によって特長づけられる．ここで

$$\mathrm{dn}^2(2Kv) - \frac{E}{K} = \frac{1}{(2K)^2} \frac{d^2}{dv^2} \log \vartheta_0(v) \tag{2.62}$$

と書くとき，$\vartheta_0(v)$ はどのような関数であるかを考えよう.

すでによく知ったように cnoidal 波はソリトンを波長 λ の間隔で等間隔に並べたような形をしている．実際，次のような関係が知られている.

$$\mathrm{dn}^2(2Kv) - \frac{E}{K} = \left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^2 \left\{ \frac{\pi K}{K'}(v-l) \right\} - \frac{\pi}{2KK'}, \tag{2.63}$$

ただし $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$ である.

そして (2.62) は

$$\vartheta_0(v) = f\left(\frac{K}{K'}\right) \exp\left(\frac{\pi K}{K'} v\right) \exp\left(-\frac{\pi K}{K'} v^2\right) \prod_{l=1}^{\infty} \left[1 + \exp\left\{ \frac{2\pi K}{K'}(v+l) \right\} \right] \prod_{l=0}^{\infty} \left[1 + \exp\left\{ -\frac{2\pi K}{K'}(v-l) \right\} \right] \tag{2.64}$$

可積分力学系

自然現象は教育的であると言われることがある．太陽を回る惑星の運動はケプラーの法則というわかりやすい形で提示された．惑星の運動が可積分だったのでニュートンは力学を構築することができたということもできる．

不動の太陽を回っている 1 個の惑星の運動（ケプラー運動）は 3 次元的であって自由度は 3 である．そして全エネルギーと角運動量ベクトルの方向が不変であること，合わせて 3 つの保存則があるので積分できる．単振り子なども同様に可積分系である．

無重力状態の空間に投げられた剛体は重心の周りに自由回転する．また重心で支えられた剛体も自由回転をする．このような場合の剛体の運動をオイラー（Euler）のコマと言う．これも可積分系である．

軸対称のふつうのコマ（ラグランジュのコマ）の運動も自由度 3 であり，3 つの保存量をもつので可積分である．

しかし重力が働いている非対称のコマ（あるいは 1 点を支えられた剛体）の自由度は 3 である．したがって 3 つの積分（保存量）が求まれば運動は決定できるが，2 つの積分はただちに求められる．これらはエネルギーの保存と支点を通る鉛直軸の周りの角運動量の保存である．したがってもう 1 つの保存量（第 3 積分と言う）が見出されれば運動は解けることになる．

コワレフスカヤ（Kowalevskaja）は剛体の主慣性モーメント A，B，C などのパラメータの間にある特別な関係があれば解ける可能性があることを推論し，実際にこれを証明した（1889）．この特別のコマをコワレフスカヤのコマと言う．「固定点をめぐる剛体の回転について」によって彼女はパリ科学アカデミーからボルダン（Bordin）賞を与えられた．

コマではないが指数格子は自由度が 3 以上の可積分系である．発見当時には珍しい体系であった．これを契機に多自由度で可積分な振動子系が発見されるようになった．その多くはソリトン解によって特長づけられるものである．

コワレフスカヤのコマについては戸田盛和『物理学 30 講 3，波動と非線形問題 30 講』（朝倉書店，1995 年）参照．

として満される（$f(K/K')$ は K/K' の関数ではあるが変数 v を含まない）．$\vartheta(v)$ は楕円関数ではないが，楕円関数と密接な関係をもつ関数で，楕円テータ（theta）関数，あるいは単にテータ関数と呼ばれるものの表現の一つである．テータ関数は ϑ_0 （ϑ_4 とも書かれる），$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ の 4 種類があり，定義の方法も数多く存在するが，詳しいことは省略する．

なお $v = u/2K = (\frac{n}{\lambda} - \nu t)$ なので $k \to 1, \lambda \to \infty, 2K/\lambda = \alpha =$ 有限 の極限をとれば (2.62)～(2.64) から (2.61) が導かれる．

5.7.2 リーマンのテータ関数

上に述べた $\vartheta_0(v)$ は $1+\beta e^{2\alpha v}$ の形の因子の積からなるが，これを広く拡張してリーマンのテータ関数が定義されている．これは多変数 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_g)$

デンマークで

デンマークのリングビー（Lyngby）で研究会があったとき，デンマークの有名な天文学者チコ・ブラーエなどの名を挙げてちょっと話をした．その次の日は遠足があって，バスに乗ったところ研究会をとりしきっていた P.L. Christiansen 教授の奥さんがバスガイドよろしく入口に立って見事に案内役を務められた．その話の一つに，「デンマークの農場で飼われているブタは毎日素晴らしい暮しをしています．その最後の瞬間がくるまでは」というのがあった．また EU（ヨーロッパ連合）が始まると，デンマークは農地が広すぎて EU のきまりに合わないので減らさなければならないといった不合理なことも起こるという話もあった．

古い城の見学の間に Christiansen の奥さんが寄ってきて，「昨夜はティコ・ブラーエとおっしゃったが，デンマークではチコ・ブラと言います」と言って，発音を何回か訂正された．レーマー（Roemer）は難しくて，毎度聞いてもイレマとかウレマとか聞こえた．初めのイとかウとか聞こえるのは R の前に口の中だけで発音するらしい．

数人だけ呼ばれて Christiansen の家でお茶の時間があった．若い人に囲まれ，日本字は難しいかと聞かれ，うっかりカタカナはやさしいと言ったのはいいけれど，日常生活にはひらがなも必要だし，難しい漢字も必要だ．やはり日本字は難しい，という話になってしまった．

の関数であって

$$\vartheta(v) = \sum_{m_1}^{m_1}\sum_{m_2}^{m_2}\cdots\sum_{m_g=-\infty}^{m_g=\infty}\exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^{g}v_jm_j + \pi i\sum_{j}^{g}\sum_{k}^{g}m_j\tau_{jk}m_k\right)$$

で定義される．ここで $m=(m_1,m_2,\cdots,m_g)$ は g 個の成分をもつパラメータ，τ_{jk} $(j=1,2,\cdots,g;k=1,2,\cdots,g)$ はマトリクスである．略して

$$\vartheta(v) = \vartheta(v \mid \tau) = \sum_m \exp(2\pi iv\cdot m + \pi im\cdot\tau\cdot m)$$

と書く．リーマンのテータ関数は ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 を含むものである．

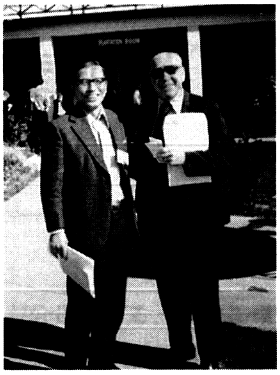
$$\vartheta(u+\tau) = \frac{i^{g/2}}{|\tau|^{1/2}}\exp(-\pi iu\tau^{-1}u)\vartheta(\tau^{-1}u \mid -\tau^{-1})$$

が成り立つ．これを ϑ 関数の虚数変換と言う．

5.7.3 周期的指数格子の一般解

指数格子を解析的に厳密に扱うと一般に超楕円積分になる．その解法は，日本で田中俊一，伊達悦朗両氏により（1976），アメリカではカッツ（M. Kac）とメールベック（P. van Moerbeke）によって独立に与えられた（1975）．田中・伊達は関数論を用いて具体的な解を示している．その解はリーマンの ϑ 関数を用いて

M. カッツ



カッツ（右，1976）.

M. カッツ（Kac）は経路積分に関するファインマン・カッツの定理などで有名であるが，指数関数に関係するものは何でも興味があると冗談まじりに言っていた．指数格子に関して，彼はいくつかのことを教えてくれた．その一つは指数格子のオーソドックスな解法であり，もう一つは私が Kac–Moerbeke 系と呼んだ力学系 (1975) である．後者は

$$\frac{dR_k}{dt} = e^{-R_{k+1}} - e^{-R_{k-1}}$$

で与えられる体系である．これは

$$R_{2k} = Q'_k - Q_k \quad R_{2k+1} = Q_{k+1} - Q'_k$$

とおくことによって 2 つの指数格子

$$\frac{d^2Q_k}{dt^2} = e^{-(Q_k - Q_{k-1})} - e^{-(Q_{k+1} - Q_k)},$$
$$\frac{d^2Q'_k}{dt^2} = e^{-(Q'_k - Q'_{k-1})} - e^{-(Q'_{k+1} - Q'_k)}$$

が導かれる．Kac と Moerbeke はこの系の逆散乱法による解法を与えている．Q_k と Q'_k の間には図 2.19 のような関係がある．

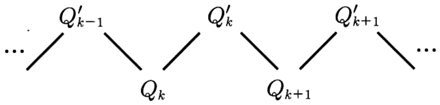


図 2.19　Q_k と Q'_k の関係.

$$Q_n = \overline{Q_n}(0) + \overline{P_n}(0)t + \log\frac{\vartheta(nc - c't + \delta)}{\vartheta((n+1)c - c't + \delta)},$$
$$P_n = \overline{P_n}(0) + \frac{d}{dt}\log\frac{\vartheta(nc - c't + \delta)}{\vartheta((n+1)c - c't + \delta)}$$

と書かれる*1),*2)．ここで $c = (c_1, c_2, \cdots, c_g)$，$c' = (c'_1, c'_2, \cdots, c'_g)$，$\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_g)$ は初期条件で決まる定数ベクトル．$\overline{Q_n}(0), \overline{P_n}(0)$ はそれぞれ定数である．

*1)　E. Date and S. Tanaka: *Prog. Theor. Phys.* **55** (1976) 457; *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **59** (1976) 107.

*2)　M. Kac. and P. Moerbeke, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **72** (1975) 1627, 2879.

付録

楕円関数

ヤコビの楕円関数に不慣れの読者のために，簡単な解説と公式数を記すことにする．すでに慣れている人は飛ばして読み，話の概要だけで十分な人は省いて見て下されば結構である．

1　sn 関数，cn 関数，dn 関数

ヤコビ（Jacobi）**の楕円関数**について基本的なことを記しておこう．この関数は三角関数を拡張したものと考えることができるので，まず三角関数から始めることにする．u の関数

$$x = \sin u \tag{1}$$

を微分すると

$$\frac{dx}{du} = \cos u = \sqrt{1-x^2} \tag{2}$$

となる．したがって

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3}$$

ここで u は x の関数，すなわち (1) の逆になっている．これを

$$u = \sin^{-1} x \tag{4}$$

と書こう．$\sin^{-1}$（アークサイン）は sin の**逆関数**を表す．

今 (3) を拡張して積分

$$\boxed{u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}} \tag{5}$$

を考える（ここで k は 0 と 1 との間の定数である）．x と u の関係を

$$\boxed{x = \mathrm{sn}(u, k) = \mathrm{sn}u} \tag{6}$$

と書こう．sn はヤコビのエスエヌ関数と呼ばれる楕円関数である．これは k（**母数**と言う）に依存するので $\mathrm{sn}(u,k)$ と書くが，これはわずらわしいので母数 k をいちいち明記する必要がないときは単に $\mathrm{sn}u$ と略記する．sn の逆関数は sn^{-1} と書く．すなわち $u = \mathrm{sn}^{-1}x$ あるいは

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathrm{sn}^{-1}x \tag{7}$$

である．

(5) において右辺の被積分は x の 4 次式の平方根が分母にある．このように 4 次式，あるいは 3 次式の平方根の積分は特別な場合を除き一般に初等関数で表すことができない．このような積分は**楕円積分**と呼ばれる．

なお

$$x = \sin\varphi \tag{8}$$

を行えば (5) は

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) \tag{9}$$

となる．これを**第 1 種の楕円積分**と言い，さらに

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = K(k) \tag{10}$$

を**第 1 種の完全楕円積分**と言う．

また

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = E(k,\varphi)$$

を**第 2 種の楕円積分**

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = E(k)$$

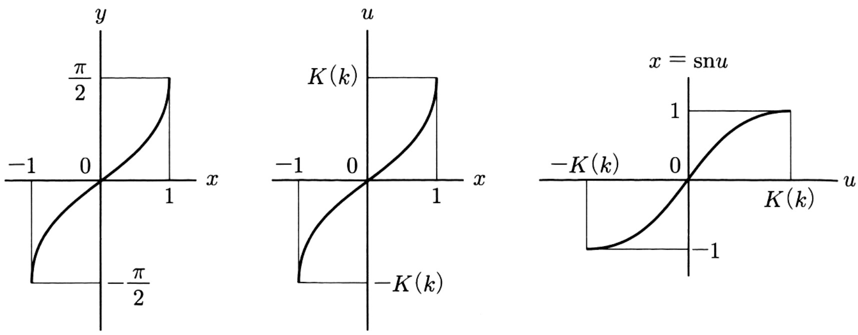
を**第 2 種の完全楕円積分**と言う．

ここで $\sin\varphi = x$ とおけば

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx$$

となる．

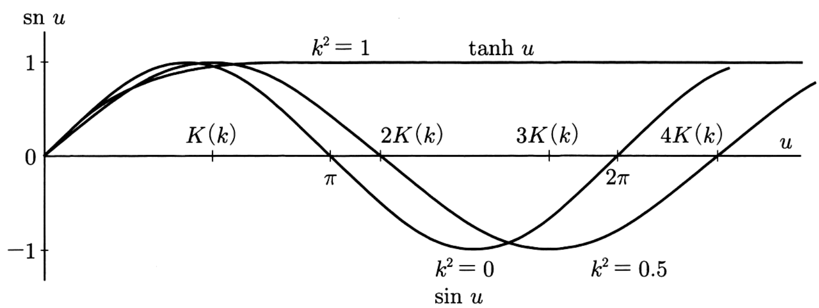
図 1 では $-K \leq u \leq K$ の範囲だけが示してあるが，$\mathrm{sn}u$ はこれを $-\infty < u < \infty$ の範囲に拡張して定義する．その周期は $4K(k)$ である．図 2 からわかるように実数 u に対し $\mathrm{sn}u$ は -1 と 1 の間で振動する周期関数で，周期は $4K(k)$ である．



$$y=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$$

$$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathrm{sn}^{-1}x$$

図 1　sin 関数と sn 関数の関係.



$\mathrm{sn}\ u = \mathrm{sn}(u, k).$

$\mathrm{sn}(u, 0) = \sin u,$

$\mathrm{sn}(u, 1) = \tanh u.$

図 2　sn 関数.

$k \to 0$ の極限では (5) は (3) になるから，sn$u$ は sin$u$ と一致することがわかる．

$k \to 1$ のときは双曲線関数を用いて

$$x = \tanh u \tag{11}$$

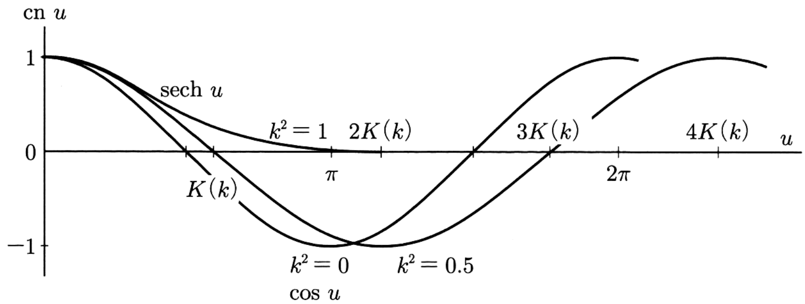
とおくと

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\cosh^2 u} = 1 - \tanh^2 u = 1 - x^2 \tag{12}$$

を得る．$k \to 1$ のとき (5) は

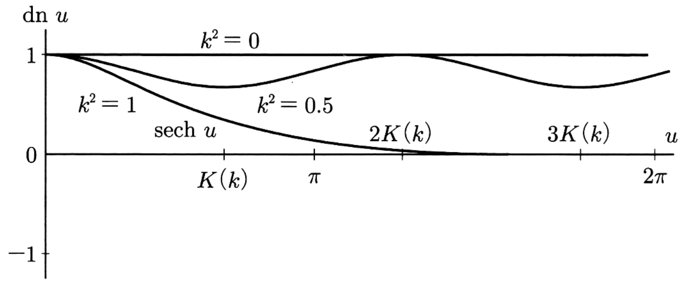
$$u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x \tag{13}$$

となる．ゆえに $k \to 1$ のとき sn$u$ は tanh$u$ と一致する．



$\mathrm{cn}\ u = \mathrm{cn}(u, k)$.
$\mathrm{cn}(u, 0) = \cos u$,
$\mathrm{cn}(u, 1) = \mathrm{sech}\ u$.

図 3 cn 関数.



$\mathrm{dn}\ u = \mathrm{dn}(u, k)$.
$\mathrm{dn}(u, 0) = 1$,
$\mathrm{dn}(u, 1) = \mathrm{sech}\ u$.

図 4 dn 関数.

1.1 cn 関数

$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$ にならって cn（シーエヌ）関数を

$$\boxed{\mathrm{cn}u = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2 u}} \tag{14}$$

で定義し，領域を $-\infty < u < \infty$ へ広げる．cn も楕円関数である（図 3).

$k \to 0$ の極限では $\mathrm{cn}u \to \cos u$ となる.

$k \to 1$ の極限では $\mathrm{cn}u \to \mathrm{sech}u$ となる.

1.2 dn 関数

ヤコビの楕円関数としてさらに

$$\boxed{\mathrm{dn}u = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u}} \tag{15}$$

を定義し，領域を $-\infty < u < \infty$ へ広げる（図 4). dn（ディーエヌ）関数の周期は $2K(k)$ であり，$\sqrt{1 - k^2} < \mathrm{dn}u < 1$.

$k \to 0$ の極限では $\mathrm{dn}u \to 1$ となる．

$k \to 1$ の極限では $\mathrm{dn}u \to \mathrm{cn}u \to \mathrm{sech}u$ となる．

2　ヤコビの楕円関数の微分

基本になる式

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{16}$$

から

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{17}$$

ここで

$$x = \mathrm{sn}u \tag{18}$$

なので

$$1-x^2 = \mathrm{cn}^2 u, \quad 1-k^2x^2 = 1-k^2\mathrm{sn}^2 u = \mathrm{dn}^2 u. \tag{19}$$

したがって

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u. \tag{20}$$

ゆえに

$$\boxed{\frac{d}{du}\mathrm{sn}u = \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u.} \tag{21}$$

cn の微分については

$$\frac{d}{du}\mathrm{cn}u = \frac{d}{du}\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 u} = \frac{-\mathrm{sn}u}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 u}}\mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u. \tag{22}$$

すなわち

$$\boxed{\frac{d}{du}\mathrm{cn}u = -\mathrm{sn}u\ \mathrm{dn}u.} \tag{23}$$

dn の微分については

$$\frac{d}{du}\mathrm{dn}u = \frac{d}{du}\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 u} = \frac{-k^2\mathrm{sn}u}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 u}}\mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u. \tag{24}$$

ゆえに

$$\boxed{\frac{d}{du}\mathrm{dn}u = -k^2\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u.} \tag{25}$$

3 積分公式

簡単な積分公式をまとめておく．ここで $\sqrt{a^2-x^2}$ などのすべての関数は実数の範囲にあるものとする．

$\boldsymbol{x=\mathbf{sn}u}$ とおいて u で微分すると

$$\frac{dx}{du}=\frac{d}{du}\mathrm{sn}u=\mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}.$$

したがって

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=du.$$

これから

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\mathrm{sn}^{-1}x$$

を得るが，これはすでに記した等式 (7) である．さらに一般化して

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(a^2-x^2)}}=\frac{1}{a}\mathrm{sn}^{-1}\left(\frac{x}{b},\frac{b}{a}\right),$$
$$\int_x^\infty\frac{dx}{\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-a^2)}}=\frac{1}{a}\mathrm{sn}^{-1}\left(\frac{a}{x},\frac{b}{a}\right)$$

を得る．

$\boldsymbol{x=\mathbf{cn}u}$ とおいて微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du}&=-\mathrm{sn}u\ \mathrm{dn}u=-\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{1-k^2(1-x^2)}\\&=-\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{k'^2+k^2x^2}\end{aligned}$$

となる（ここで $k'=\sqrt{1-k^2}$ は**補母数**と呼ばれる）．したがって

$$-\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}}=u=\mathrm{cn}^{-1}(x,k)$$

を得る．ここで積分の下限は $u=0$ のとき $x=\mathrm{cn}0=1$ の条件で決めた．一般化して

$$\int_x^b\frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(a^2+x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{x}{b},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$
$$\int_b^x\frac{dx}{\sqrt{(x^2-b^2)(a^2+x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{b}{x},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

$\boldsymbol{x=\mathbf{dn}u}$ とおいて u で微分すれば

$$\frac{dx}{du}=\frac{d}{du}\mathrm{dn}u=-k^2\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u=-\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}\qquad(k'^2=1-k^2).$$

したがって

$$u = -\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}$$

を得る．これから

$$\mathrm{dn}^{-1}x = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}.$$

これから

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(x^2-b^2)(a^2-x^2)}} = \frac{1}{a}\mathrm{dn}^{-1}\left(\frac{x}{a}, \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).$$

4　加法定理

三角関数の加法定理として

$$\sin(u+v) = \sin u\ \cos v + \cos u\ \sin v \tag{26}$$

がある．前に母数 $k \to 0$ の極限で $\mathrm{sn}u \to \sin u$ となり，$k \to 1$ の極限で $\mathrm{sn}u \to \tanh u$ となることを注意した．そこでここでも tanh の加法定理に注意しよう．これは非線形で

$$\tanh(u+v) = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u\ \tanh v}. \tag{27}$$

これらの極限 $k \to 0$ (26) と $k \to 1$ (27) を考えると sn の加法定理が

$$\boxed{\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v + \mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u}{1 - k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v}} \tag{28}$$

であることが納得できる（この証明は略す）．しかしこの類推は $\mathrm{cn}(u+v)$ や $\mathrm{dn}(u+v)$ には通用しないらしい．これらは次のような加法定理に従う．

$$\mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}u\ \mathrm{cn}v - \mathrm{sn}u\ \mathrm{sn}v\ \mathrm{dn}u\ \mathrm{dn}v}{1 - k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v}, \tag{29}$$

$$\mathrm{dn}(u+v) = \frac{\mathrm{dn}u\ \mathrm{dn}v - k^2\mathrm{sn}u\ \mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{cn}v}{1 - k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v}. \tag{30}$$

4.1　$\mathbf{sn}(n+K)$ などの値

$\mathrm{sn}u$ や $\mathrm{cn}u$ の周期は $4K(k)$ であり，$\mathrm{dn}u$ の周期は $2K(k)$ である．$K = K(k)$ と略記すると

$$\begin{aligned} &\mathrm{sn}0 = 0, \quad \mathrm{sn}K = 1, \quad \mathrm{sn}2K = 0, \quad \mathrm{sn}3K = -1, \\ &\mathrm{cn}0 = 1, \quad \mathrm{cn}K = 0, \quad \mathrm{cn}2K = -1, \quad \mathrm{cn}3K = 0, \\ &\mathrm{dn}0 = 1, \quad \mathrm{dn}K = \sqrt{1-k^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

$\mathrm{sn}(u+v)$ の加法定理において $v = K$ とおくと

$$\mathrm{sn}(u+K)=\frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u} \tag{32}$$

を得る．同様にして

$$\mathrm{cn}(u+K)=-k'\frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{dn}u}, \tag{33}$$

$$\mathrm{dn}(u+K)=\frac{k'}{\mathrm{dn}u} \tag{34}$$

などが得られる（$k'=\sqrt{1-k^2}$）．

4.2 種々の加法定理

上述の加法定理から，なお多くの加法定理が導かれる．その例を挙げておこう．例えば

$$D=1-k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v$$

として (28) から

$$\mathrm{sn}(u+v)+\mathrm{sn}(u-v)=\frac{2\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v}{D},$$
$$\mathrm{sn}(u+v)-\mathrm{sn}(u-v)=\frac{2\mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u}{D}.$$

これらを掛け合わせると

$$\mathrm{sn}^2(u+v)-\mathrm{sn}^2(u-v)=\frac{4\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u\cdot\mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v}{D^2}.$$

他方で

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}\frac{\mathrm{sn}^2v}{D} &= \frac{2\mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v}{D}-\frac{\mathrm{sn}^2v}{D^2}(-2k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v).\\ &= \frac{1}{D^2}\left\{2\mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v(1-k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v)\right.\\ &\qquad \left.+\,2k^2(\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^3v\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v)\right\}\\ &= \frac{2}{D^2}\mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{sn}^2(u+v)-\mathrm{sn}^2(u-v)=2\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{D}\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u\ \mathrm{sn}^2v\right).$$

これからソリトンを学ぶ人へ

大学1年生のとき，物理数学演習とかという授業があった．午後の時間で先生はついているのだけれど，ほとんど時間に制限のない勉強時間であった．教室の外へ出ると近くに第2食堂という学内食堂があって，授業の途中でお茶を飲んだり，軽食をとることもあった．そしてまた教室へ戻ってきて演習問題と取り組んだりする．先生が一緒になって考え込んでしまうこともある．夕方になって，学生も先生も飽きてしまったら，解答が得られないまま来週また続きをやりましょうということで散会してしまうこともあった．

もちろん参考書を見たり，公式集を見たりするのは自由であるが，先に答を教えてくれれば証明しやすいだろうと思ったり，参考書に似た問題や答がないかと探したりするのはよくない．人に頼らずに自分で解法を工夫しなさいと先生にくぎを打たれた．高校までの授業とは違って，むしろ自分で疑問を発見し，自分なりの解決方法を見出す習慣を身につけるようにしなさいというのである．

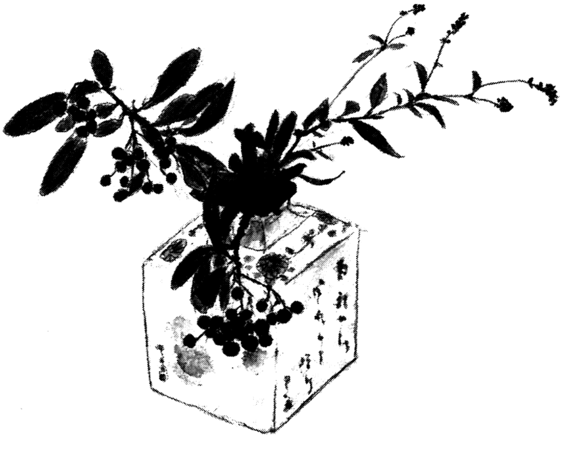
大学を卒業してからあとで気がついたのであるが，これは研究者が本を読んだり，考えたり，実験したりして，そこから新しい疑問，問題点を発見し，さらにみずから解決方法を工夫する努力と同じである．そういう努力をしても問題が解けない場合が多いかもしれない．しかし努力した時間は必ずその人の実力になるに違いない．

数学や物理の問題の解法が一つしかないと思うのは全く間違いである．たとえばピタゴラスの定理（3平方の定理）の証明方法は10通り以上もある．量子力学でもシュレーディンガーの量子力学だけでなくハイゼンベルクの量子力学もあり，ディラックの，あるいはファインマンの量子力学がある．一つの解法が見出せたら，さらに別の証明法を見出すこともできるだろう．それができたら解決のプロセスを楽しむことができるようになるに違いない．もしもそれが今までになかった新しい解法であったりしたら，それは努力した人の定理と呼ばれるようになるだろう．そういうことはほんとにまれにしか起こらないだろうが，全く起こらないというものでもない．

ある先輩の先生から教えられたのであるが，「計算はていねいに書いて，計算まちがえをしたら消ゴムできれいに消して書きなおすのがよい」と言われた．ことに検算のときは計算を飛ばして早く結果を求めようとしたくなるが，それではかえって間違えてしまうことになる．ソリトンの式の計算はけっこう面倒なことが多いので気をつけなければならない．

第3編

物理学とは何か



おいても成り立つ式であり，(3.12′) も両方の立場で成立する．しかし (3.10′) は量子力学における式であるのに対し，(3.12′) は同じ形をしているが古典的とも見なせるし量子力学的とも見なせる式であると言えるだろう．

しかし，(3.10″) ではプランク定数 h が右辺の分母にあって，形式的な古典的極限 $h \to 0$ をとれば，$a \to \infty$ になってしまうので，(3.12′) でそういう極限をとることは許されない．

いずれにしても，マクロ的古典的な光の圧力から（熱力学を用いて）量子力学的なシュテファン・ボルツマンの法則が得られるということは面白い．プランクもアインシュタインも熱力学を深く信奉していた．ほかの物理学が成り立たなくなっても熱力学は残るとさえ考えていたらしい．

もしかするとダークマターも熱放射のように，熱力学的な考察によってその不思議さの一端が解明されることがあるかもしれないなどと夢想してみる．

レイリー卿

イギリスの著名な物理学者レイリー卿（Lord Rayleigh, 1842–1919）の相続前の名は John William Strutt である．彼は 3 歳になるまで物が言えなかった（この点 3 歳になっても言葉がおそかったアインシュタインに似ている）．祖父がこの子を初めて見たとき「これは余程利口か，それとも大馬鹿だ」と言ったという．ひどくはにかみやで，初めて大学で講演をしたときは小声でよく聞きとれないくらいであったが，晩年にはかなり上手になった．

学友バルフォーア（後の首相）の 2 人の姉妹エリーノアとイヴリンとに紹介され，1871 年にイヴリンと結婚した．翌年ひどい熱病にかかって関節と肺をおかされたが幸い治癒したが，以後何度も病気にかかっている．病後の冬の寒さを避けてエジプト旅行に出かけ，その余暇に名著『音響学』（『Theory of Sound』）を書き始めている．数カ月の旅から帰った翌月に父のレイリー卿が亡くなり，彼は父の遺産である荘園を管理しなければならなくなった．また上院で衛生問題について演説をさせられるなどの雑用も重なったが政界には興味がなかった．

幸い弟の Edward Strutt が大学を卒業し農事に身を入れるようになって，1876 年には家の管理にわずらわされないようになった．この間にも彼は水力学，音響学，回折格子，光学などの実験および理論的研究を手広く行っている．

1879 年にマクスウェルが死んだのでキャベンディッシュ研究所（ケンブリッジ）の後任問題が起こった．その頃，不景気のためにレイリー家の財政はかなり困難な状況にあった．そんなこともあって 1879 年 12 月にレイリーはこの研究所の椅子に就くことを承諾した．ここでレイリーは電気の単位の測定を決定的にやり直したという．

1884 年にレイリーはキャベンディッシュ研究所をやめた．在籍 5 年間に出した論文の数は 60 余りだった．「あの調子で永くはとても続けられなかった」と述べている．

郷里へ引き上げてから，建物を改造して実験室や寝室と地下の工場を作った．「部屋の照明は私設ガスタンクのガスで間に合わせた．倹約と保守的な気分と面倒がりとのために電燈設備をしないでしまった」という．雑誌類は人に貸さなかった．古い包紙などは棄てずにとっておいて使った．家の修理などを執事がすすめてもなかなか受け入れなかった，などと書かれている．ちょっと変わったところのある人だったに違いない．

空気中にアルゴンという気体があることを発見した有名な研究はこの実験室でなされ，1904 年のノーベル物理学賞が与えられた（レイリー卿：気体の密度に関する研究とアルゴンの発見）．

以上は寺田寅彦さんの随筆「レイリー卿」からの抄録であり，この随筆はレイリー卿（John William Strutt）の息子 Robert John Strutt からの抄録である．最後にもう少し引用させていただきたい．

「彼は自分でもしばしば言明したように全く自分の楽しみのために学問をし，研究をした．興味の向くままにむつかしい数学的理論もやれば，甲虫の色を調べたり，コーヒー茶碗をガラス板の上に滑らせたりした．彼にはいわゆる専門はなかった．しかし何でも，手をつければ端的に問題の要点に肉迫した．」

第 17 章

エピローグ

1. 20 世紀初頭の大改革

物理学に限らず科学というものは，その前の時代の成果を踏まえてその上に積み重ねられてきたものである．物理学もあるときには前の時代の考え方にそってさらに知識を増やす努力をし，また行きづまったときや新たに興味ある現象に出会ったりしたときには，前の時代の考え方を棄てて新しい考察の上へ飛躍してきた．そのため物理学という学問は，現代に至るまでに何度も変化し改革を重ねてきている．それぞれの時代にそれぞれの時代の物理学があったわけで，これが永劫に変わらない物理学の不変のテーマであるとか主義であるとかいうようなものはない．これからも，人間の知的好奇心がしぼまない限り物理学は何度でも変わっていくであろう．

それはともかくとして，一応の物理学の定義を求めると，朝永振一郎先生の『物理学とは何だろうか』(岩波新書) には次のように述べられている．

> 「(物理学は) われわれをとりかこむ自然界に生起するもろもろの現象――ただし主として無生物にかんするもの――の奥に存在する法則を，観察事実に拠りどころを求めつつ追求すること」

ここで朝永先生も注意しておられるところであるが，何か (たとえば物理学とは何かということ) について語り始めるときは，言葉を使わなければならない．言葉がなければ何事について語ることもできないのは当然であるから，上の文章でもはじめに用いる言葉である「自然」とか「観察」などは定義されないままで使われる．これらの言葉は定義なしで常識にまかせ，漠然としたままにしておくことになるが，この方法は無定義のものの公理群から出発して意味のある体系を構築する数学の方法に似ているわけである．

たとえば古典物理学においては，「自然界」は「人間以外の自然」を意味し，「主として無生物」ではなく「無生物だけ」を対象とする．このようなせまい土俵における物理学が古典物理学であるということができる．

これに対し，現在の物理学は人間の体や脳の中で生起する現象までも扱うようになってきた．したがって物理学に対する上の定義を保存しようとすれば，我々は「自然界」を「人間を含む」とし，「ただし主として無生物」というただし書きも削除しなければならない (「生物物理学」なども現在最も活発な物理学の分野である)．

また，たとえば「観察事実」も古典物理学では，肉眼で見ることができるもの，手で触れたりして感覚で確かめることができる事柄を対象とし，顕微鏡や望遠鏡などはむしろ肉眼や虫眼鏡を補助する程度のものと考えられがちである．電場，磁場なども我々が直接に五感で確かめることができるもの，あるいはその延長線上にあるものとして捕えられる古典物理学的な物理量である．

測定によって知られる自然現象は，測定機器や

技術の進歩によって高められ広められる．しかし19世紀頃には，測定技術を向上させても物理現象の本質は変わらないと考える人が多かったのだろう（新しい理論や実験によって量子効果などが発見され，旧来の物理概念が通用しなくなるとは夢にも思わなかったのである）．19世紀末には，もはや物理学に本質的な進歩はなく，あとは精度を上げたり，応用を広げたりする仕事が残されているにすぎなくなったというのが大多数の物理学者の見解であった．

ニュートン力学とマクスウェルの電磁気学は，それぞれ莫大な数の実験によって確かめられたし，光学現象も電磁気学の中に包みこまれていることが示された．そして全宇宙は力学と電磁気学という2つの大黒柱の上に構成されているのは間違いないと思われていた．

しかしこのような極端な見方はいずれ破綻するものらしい．すべての現象がニュートン力学によって説明できると考えていたW.トムソン（ケルビン卿）には，当時の物理学でまだ説明のできなかった基本的な事柄がただ2つあるだけと考えられた．彼は1900年4月に「熱と光の力学的理論の頭上にある19世紀の雲」と題する講演の中で，解決されていない2つの問題として，地球に対するエーテルの運動が観測されていないというマイケルソン・モーリーの実験に関する問題と，熱輻射と物質の比熱の理論が実験に合わないという問題を挙げ，しかしこれらも間もなく古典物理学によって解決されるだろうという楽観的な見解を述べている．

しかし，ケルビン卿の予想に反して，この2つの雲の中の第1の問題からは，アインシュタインの特殊相対性理論（1905）が現れ，これはニュートン力学における時間と空間の概念を書きかえる大変革であったし，第2の問題からはプランクの熱輻射の式（1900）が現れ，これは量子論誕生のきっかけになった．

したがって，ケルビン卿は深いところまで見通すことができなかったと言えるが，相対論と量子論というニュートン以来の科学を根底から改革する20世紀の新しい科学の匂いをかぎ分けていたのはさすがにケルビンであったと言うこともできるようである．ケルビンの頑固にニュートン力学にこだわる精神が，かえって彼にこのような予感をもたらせたのかもしれない．

光に関する物理学を例にして物理学の変遷をたどってみることにする．

2. 光の波動説

「はじめに光ありき」と言うが，物理学において最も古く，しかも今まで続いている問題は「光って何だろう」ということであり，これは物理学における最大の問の一つである．

17世紀にホイヘンスが光の波動説を唱えたのに対し，ニュートンは粒子説を唱えたとされている．ニュートンは熱心に光の実験を行い，プリズムやレンズによって白色光がいわゆる7色の光に分かれる分散現象などを研究し，望遠鏡の像に色がつくことを避ける反射望遠鏡を発明して有名になった．光に関する実験を重ね1704年には『光学』を著している．これは岩波文庫に訳されているが，ニュートンの考え方がいろいろ述べられていてたいへん面白い本である．彼はほとんど平らなガラスを重ねたときに見られるニュートン・リングと呼ばれる縞模様も発見している．これは光の波の干渉によってできるのであるが，ニュートンはこれを光の粒子の振動現象によるものと考えた．

木星の衛星が木星の後ろに隠れる食が時間的に進んだり遅れたりする現象から光の速さを推定したのはニュートンの時代のレーマー（1676）であった．『光学』には太陽までの距離の測定と並んで，光が太陽から地球へ届くまで約8分かかることなどが述べられている．

光の「波動説」は19世紀初めになってイギリスのヤングなどによって復活した．複屈折の現象からヤングは光が横波であることを論じ，フレネルは光の波の詳しい理論を作り上げた．水中における光速度が空気中よりも小さいことがフーコーによって確かめられたのは1850年のことであった．

光は何もないと思われる空間を高速度で伝わってくる．しかし上に述べたように19世紀の終り

近くになっても光の波が本当は何の波であるのかということを知る手掛りはまったくなかった．ただ，それは波であるというからには光の波を伝える「もの」があるに違いないと考えて，それを「エーテル」と呼んだ．フレネルの波動論の論文では，物質が動くときの物質内のエーテルがどの程度随伴するかなどという立ち入った考察もされている．

光の媒質として宇宙に広がったエーテルがあるとするとエーテルはたいへん奇妙な性質を持たねばならないと結論される．第一に，惑星の運動がエーテルの抵抗を受けているという証拠はないから，抵抗が生じないほどエーテルは十分希薄で軽くなければならない．またエーテルが気体であるとすると，その中を伝わる波の速さはだいたい圧力と密度の比の平方根に等しいことになるが，光は高速度で伝わるのでエーテルの圧力も密度もゼロの極限に近いとしなければならない．しかしこのように仮定すると光の波はエネルギーをまったく運べないことになってしまう．さらに最も納得できないのは，ヤング（T. Young，1773–1829）やフレネル（A.J. Fresnel, 1788–1827）の言うように光が横波であるとすると，横方向の変形に対する弾性，すなわち剛性，言いかえれば固体の性質をもたなければならないということになる．フレネルが光の横波説を出した当時，大きな反論がまき上ったのは想像できる．フレネルの友人であり，また熱心に波動説を支持していたアラゴーでさえ，フレネルがその考えを打ち出した論文に承認の印のサインをするのを断った．その理由はエーテルが剛性をもつなどということはあらゆる観測事実に抵触するではないか，ということであった．

光の干渉実験を行うことによって光の波長を測定し，光が波動であることを決定的に明らかにしたのはヤングである（これは中学の教科書にも載っている有名なダブルスリットの実験で，レーザーを用いれば簡単に検証できる）．彼は万能の天才で，医師であり眼の生理学や色覚についての仕事やエジプト学などでも広く知られている．ロンドンにできたばかりの王立研究所（後にファラデーが終生暮らした所）の自然哲学の教授を 3 年間務めた．ここでの仕事に必要な講義の才能には恵まれていなかったらしい．ヤングの著書『自然哲学および機械技術講義集（自然哲学論集）』(2 巻，1807) を見ると，生理光学，虹の理論，流体力学，毛管現象など，非常に広範囲にわたっていて，たいへん面白いものがある．

ヤングとフレネルは親しく連絡をとる仲であったらしい．フレネルは王立協会から外国人会員に選定され，フランスのアカデミーはヤングを外国人会員に選んでこれに報いた．

3. 光の電磁波説

さて，フレネルは 1827 年に結核のために亡くなったが，その頃の物理学界では新たに電気現象が興味の中心になってきた．静電気や磁石の作用に関する初等的な研究は昔からずっと続いてきたが，1800 年にヴォルタ（A. Volta, 1745–1827）が電池を発明し，これによって定常的な電流が得られるようになってから，電流の作用に関する研究が相次いで発表されるようになった．

ヴォルタはイタリアのコモ湖畔の裕福な聖職の家で生まれた．科学への愛好心は自発的に育ったらしい．友人の家にあった装置を用いて電気に関する実験を始め，16 歳のときには何人もの電気学者に手紙を書くようになった．静電気を作ってため込む電気盆という装置や電位計を考案し，コモの学校の物理の教授を経てパヴィア大学の物理学教授になった．

電気的な現象で蛙の足が動いたというガルヴァニの 1791 年の論文を追試している最中に，ヴォルタはたとえば銅と亜鉛のような 2 種類の金属

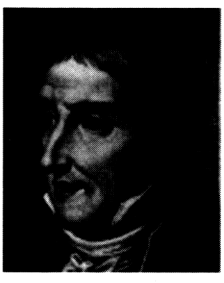


図 3.16　アレクサンドロ・ヴォルタ．

を接触させると電位差が生じるのではないかというヒントを得，これを見事な静電的測定によって立証した．この問題をさらに深く研究した末に彼はヴォルタの電堆と呼ばれる電池を発明したのである．

ヴォルタの生涯における最大の発見（電池の発明）は 55 歳という比較的高齢な時期になって現れた（これは我々を元気づけることである）．この発明は直ちに全物理学者からの喝采を浴びた．彼は 1801 年にはパリへ行き，ナポレオンも臨席する中で実験を披露した．しかし彼は政治に対する関心はまったくなく，激動の時代を無傷で通り抜け，隠退気味の生活を送って 82 歳で亡くなった．

コモ湖畔で国際会議があったとき，会議のメンバーとヴォルタが住んでいた家を見に行く機会があった．その家は素晴らしい湖の景色に面して建つ大きな白堊の邸宅であった．コモにはヴォルタ広場という場所もある．

さて，電池の発明によって強く持続的な電流が得られるようになってから電気の研究は新たな発展をするようになった．水に電気を通すと水が酸素と水素に分解することが直ちに発見され，いろいろな塩を電気分解すると新しい元素が発見されるなど，電流のもたらす驚くべき効果が次々と発見されたので物理学者や化学者は忙しく働いた．

1820 年にはデンマークのエルステッド（Ørsted）が電流の作用に関する大発見をした．電流の磁気作用の発見である．学生に見せる実験で彼が針金に電流を流したとき，近くにおいてあった磁針が揺れたのに気がついた．彼は実験を繰り返し，電流が磁石に力を及ぼすことを確かめたのであるが，これは電磁気学研究の端緒を開く大発見だったのである．電気の現象と磁気の現象が深く関係しあったものであるのが明らかにされたのであった．

エルステッドの発見が主として定性的なものであったのに対し，これを聞いたフランスのアンペール（Ampére）は詳しい実験を繰り返し，電流の磁気作用に関する完璧で定量的な数学的理論をつくり上げた．この理論は電流の磁石に対する作用や電流どうしの間に働く力を電流の微小部分による

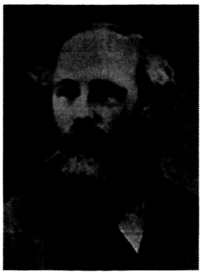


図 3.17 ジェイムス・クラーク・マクスウェル．

「遠隔作用」として表す理論である．この研究によりアンペールをマクスウェルは「電気学のニュートン」と呼んでいる．アンペールは実験物理学者としても数学者としてもすぐれていた．

ファラデーが電磁誘導（磁場の変化が電場を生じる現象）を発見したのは 1831 年で，ファラデーは空間に広がり時間的に変化する磁気力線と電気力線の「近接作用」によって電磁現象を統一的に説明する「電磁場」の理論を考えた．「場の理論」の始まりである．電磁気学はマクスウェル（Maxwell, 1831–1879）によって数学的な理論としてまとめあげられたが，ここではその話は省略する．

ニュートンの万有引力の法則やアンペールの電気的な力によって代表される遠隔作用と，ファラデー・マクスウェルの電磁場によって代表される近接作用との 2 つの考え方がある．この 2 つは数学的には異なっても，物理的には結局同じなのではないかと思われている．今では場の理論のほうが有力なようにも見えるが，原子などの量子力学ではクーロン力などを遠隔作用として認めているわけである．

セグレの『古典物理学を創った人々』（前出）にも次のように書かれている．

> 「…巨視的な力学でいう近接作用とは，実は，典型的な遠隔作用にあたるクーロン力が複雑な現われ方をしたものにほかならない．これに対して力を伝える媒質を持ち込もうとした人たちは，結局エーテルの存在やその力学的な性質をうんぬんする羽目に陥ったのであるが，本当はこれこそ受け入れ難いものなのである」

「しかしそれはともかくとして，この電気力を伝える媒質に本質的な役割を担わせたことが，電磁気学に大変革をもたらし，その飛躍的な進歩を促したのは間違いない．その大部分はファラデーとマクスウェルの功績によるもので，この 2 人のおかげで電磁気学は古典論としての頂点に到達したのである」

ファラデーは電気力線や磁力線が振動して波（電磁波）として伝播することを想像したらしい．彼はこれを発表せずに封印し，何十年か後までしまっておくようにしたという話である．おそらく数理的にも実験的にも不確かな想像を発表するのは気がひけたのであろう．

電磁波はマクスウェルによって予言され（光の速さも予言された），1886 年にはヘルツによって電磁波の実験が初めて成功した．

4. 光と時空

こうして光は電磁波であることが確立され，同時に空間（あるいは真空）は電磁波を伝える媒質という属性を与えられることになった．しかし電磁波が伝わるのであるからその媒質であるエーテルというものがあるに違いないと考える人が依然として多かったらしい．しかしエーテルの存在が本当であるとすると，マクスウェルが算出した光の速さはエーテルに対する速さであることになるから，いろいろな方向に光を走らせることにより，エーテルが地球に対して静止しているか，それとも太陽系に対して静止しているかなどということを光学的測定で決定することができるはずである．光速度は地球の公転速度に比べて 4 桁も大きいが，このような光学的測定は十分可能であるはずであった．しかしマイケルソンとモーリーが行った詳しい実験によれば，光はあらゆる方向に同じ速度で伝わることが検証された．エーテルが静止あるいは流れている証拠はつかめなかったのである．

「光線のビームを光速度で追いかけたら光線は静止した波として見えるだろうか，そんなことはないのではないか」

これは 16 歳のときにアインシュタインがもった疑問であったと言う．これは当時，誰も答えることのできない疑問であった．大学生だった頃，彼はエーテルに対する地球の運動を確かめる実験をしようと考えたそうであるが，これは教授の賛成を得ることができずに断念した．

ある朝，ベッドから起き上ったときに彼の頭にひらめいたのは，「エーテルというものは存在しない．そして時間についての常識を棄てれば，光の伝播に関する矛盾は解消する」というようなことだった．簡単に言えば次のようになる．

エーテルというものは存在しない．空間に方向性はないから，どのような速度の慣性系においても光はあらゆる方向に一定の速さで伝わるとしなければならない（これは空間・時間を定義する基本原理（光速度不変の原理）である）．この原理を用いれば，光の信号を交換することにより同一の慣性系の上においたすべての時計の時間を合わすこと（同時性）ができる．また同様に光の信号を交換することにより，違う運動をする 2 つの慣性系の上においた時計を比べることができるが，このときは時計の置かれた位置によって，時計が示す時刻には差が生じる．したがって違う運動をする慣性系の間では時間の同時性は成り立たない．

特殊相対性理論（1905）において，光速度不変の原理を表す時空の変換公式は運動学的なものであるが，これと運動量などの保存則から，運動量，質量，質量とエネルギーの関係（$E = mc^2$），相対論的運動方程式などの動力学的な法則が導かれる．

特殊相対性理論における時空はローレンツ変換という 1 次変換式で数学的に定義され，この式が含む定数は光速度という物理的な意味をもつ．光は特殊相対性理論を貫くテーマであるが，この理論は光や電磁場や時空が本当は何であるかというような問には何も答えてくれない．

さらに 1900 年に発表されたプランクの熱放射の式が発表され，これを解釈するには，光が粒子としての性質をもつことを容認しなければならなくなった．これが量子論の初めで，光は波であり粒子であるという 2 重性をもつことになった．そ

の後の物理学の発達においても意外な発見は次々と生じてきた．

物理学は意外性の旅である．自然はどこまでもこの旅につき合ってくれるらしい．

5. 物理学的モデル

最後に，理論物理学について私が考えていることを少し述べておきたい．

ニュートンは空虚な空間と時間の枠の中で運動法則と万有引力の法則に従いながら惑星が運動するとした．ファラデーは，磁力線や電気力線が活躍する電磁場というモデルを考え出し，その後の物理学は場という概念にとらわれるようになった．アインシュタインが一般相対性理論で明らかにしたのは，物体の運動は重力場に従い，重力場は物体の運動に従うという時空の重力場モデルであった．さらに彼は一様な 4 次元球面の宇宙モデルを考え，これは現在の膨張宇宙モデルへと発展した．

その他にも，たとえば理想気体，結晶格子，金属自由電子，半導体，原子，素粒子など物理学の至る所でモデルが発明され，広く使われている．これらの物理学的モデルは歯車のように視覚的なものから抽象的，数学的なものまで種々様々である．インスピレーションによって瞬時に得られたものもあり，改良を重ねた末にようやく確立したものもあるが，ニュートン力学のモデルは開闢以来の試行錯誤の末にようやく到達した概念によって構成されたものであった．原子モデルも古代ギリシャ時代の原子論が 19 世紀の実験科学の発達を経てようやく確立されたが，このモデルを得たことによって，現代物理学の時代が招来された．

このような科学の歴史に照らし合わせてみても，物理現象の明確なモデルを想像し構築することが物理学にとって最も重要であると思わざるを得ない．

人間の知力には素晴らしいものがある．しかし人間の考える能力にも限界があるに違いない．利口でも犬には犬の，イルカにはイルカの能力に限度があるように，人間にも科学的に自然を理解する能力に限度があるはずである．

人間的尺度ということもある．ニュートン力学は日常的尺度に似合うパラダイムである．宇宙スケールのことには一般相対性理論が似合い，原子論的スケールには量子力学が似合う．昆虫は複眼を備えているし，人間の感覚器官としては目や耳などがある．知的な能力においても多面的にいくつもの方法があり，死角もあって，いくつもの階層があるのだと思う．それらの階層の間には越えがたいギャップがあるとしても不思議はないだろう．

物理学は（数学も）人間の構成したものであって，自然の複雑さと人間の理解との間には比べものにならないほどの大きな差があると思う．人知には無限大の可能性があるとしても，自然には無限大の無限大乗の複雑さがあるであろう．自然が理解可能であるという証拠はない．結局のところ物理学の世界で人間が理解できることは，人間が作り上げたモデルの動作にとどまるのではなかろうか．しかしそうだとしても，それは依然として興味津津の世界である．

索　引

著者略歴

戸田　盛和
と　だ　　もり かず

1917 年東京に生まれる.
1940 年東京大学理学部物理学科卒業.
東京教育大学教授，千葉大学教授，横浜国立大学教授，放送大学教授を歴任.
現在，東京教育大学名誉教授，ノルウェー王立科学アカデミー会員．理学博士．藤原賞．日本学士院賞受賞.
専攻，理論物理学.
液体の理論や「戸田格子」と呼ばれる非線形理論で世界的に著名な理論物理学者．学問のみならず教育にも深い関心を持ち続けている．金米糖を研究したことでも有名であるが，おもちゃが大好きなので「おもちゃ博士」の異名を持つ.

主要著書：『おもちゃと金米糖—戸田盛和エッセイ集 I』『物理学 30 講』(朝倉書店)，『力学』『熱・統計力学』『ベクトル解析』『統計物理学』(共著)『非線形格子力学』(以上，岩波書店)，『おもちゃの科学』(日本評論社)，『液体理論』(河出書房) ほか.

主要訳書：『ファインマン物理学 IV 電磁波と物性』(岩波書店)，『ハテ・なぜだろうの物理学』(培風館) ほか.

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 49

『ソリトンと物理学』

著　者　戸田　盛和

2006 年 7 月 25 日　初版発行

発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
大溝良平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁